

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

11. Band, Heft 6    **UND IHRE GRENZGEBIETE**

S. 241—288

## Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

**Fraenkel, A.:** Zum Diagonalverfahren Cantors. *Fundam. Math.* 25, 45—50 (1935).

Eine sehr sorgfältige Darlegung dieser Methode mit dem Ziel, die Einwände von P. W. Bridgeman [*Scripta Math.* 2, 224 (1934)] u. a. zu entkräften. Der Verf. hebt hervor, daß man mit Hilfe des Verfahrens auf konstruktivem Wege transzendente Zahlen bestimmen kann. Seine Formulierungen sind in den Hauptsachen auch intuitionistisch einwandfrei.

*A. Heyting* (Enschede, Holl.).

**Bennett, Albert A., and Charles A. Baylis:** A calculus for propositional concepts. *Mind* 44, 152—167 (1935).

This is an abstract theory of the calculus of propositions of the same general type as that proposed by C. I. Lewis (see for example Lewis and Langford's "Symbolic Logic", 1932, Chap. VI and app. II). It is characterized by the presence of two kinds of implication, a strict and a material; of these the former is interpreted as the relation which holds between two propositions  $a$  and  $b$  when and only when  $b$  follows logically from  $a$ , while the latter holds whenever  $b$  is true or  $a$  false. In the theories of Lewis strict implication is defined by means of a notion of modality (possibility or impossibility); on the other hand the present authors take strict equivalence as a primitive operation, along with the logical product and negation. Their primitive propositions consist essentially of Huntington's fourth set of postulates for Boolean Algebra [*Trans. Amer. Math. Soc.* 35, 280ff., and 557 (1933)], with asserted strict equivalence playing the role of equality, together with a single additional postulate to the effect that  $(a = a) = 1$ . On this basis the authors give formal derivations of formulas and rules essentially as follows: (a) the rules for equality; (b) certain elementary propositions of Boolean Algebra, following Huntington loc. cit., except that a simpler proof of the distributive law is given; (c) the primitive propositions of the propositional calculus as given in *Principia Mathematica*; (d) the definitions and postulates adopted by Lewis (viz. B 1 to B 8 incl.). On the other hand it is easy to show, (by the methods of Lewis and Langford, loc. cit., appendix II), that the system is actually stronger than the system B of Lewis; but the authors do not discuss its relationships with any stronger system. The treatment is strictly abstract, and the initial data are set forth with unusual explicitness; it is not possible to maintain the distinction between formal structure and interpretation in the limited space of this review. (See also Huntington, this Zbl. 6, 242 u. 386.)

*H. B. Curry* (State College, Pa.).

**Kleene, S. C.:** A theory of positive integers in formal logic. II. *Amer. J. Math.* 57, 219—244 (1935).

This is Part II of the authors development of the theory of positive integers. (For Part I see *Amer. J. Math.* 57, 153—173; this Zbl. 11, 2). It is concerned principally with definitions by recursion. The author first shows that any function definable intuitively by simple recursion can be defined formally and explicitly within his system; the same is true of some types of generalized recursion. He then shows how to define certain special functions of considerable complexity of which some of the most interesting are: (1) A function which enumerates formally (with repetitions) a given set of formulas  $A_1, A_2, \dots, A_n$  together with all those derived from them by one or more applications of rules of the form  $A \rightarrow R(A)$  or  $A \& B \rightarrow R(A, B)$ . (2) A function  $L$  which enumerates in their natural order all the positive integers or sets (dyads, triads, etc.) of integers satisfying a given condition, and is such that if less than  $k$  such integers



exist, then  $L(k)$  does not reduce to what is called a normal form in the symbolism if the condition be  $x^t + y^t = z^t$  with  $t > 2$ , then the Fermat problem is equivalent to the question of whether  $L(1)$  has a normal form. (3) A numerical function  $U$  which enumerates all those formulas  $Q$  for which  $F(Q)$  is proveable,  $F$  being a (propositional) function such that for some  $P$ ,  $F(P)$  is proveable. This last result is expected to lead almost immediately to a contradiction, based on the Richard paradox. (See the previous review.)

H. B. Curry (State College, Pa.).

**Ward, Morgan:** A determination of all possible systems of strict implication. Amer. J. Math. 57, 261—266 (1935).

This concerns the theory of strict implication as presented by C. I. Lewis in his and C. H. Langford's book, *Symbolic Logic* (New York 1932). Three matrix representations of order four (due to Parry and Wajsberg) are given by Lewis in the appendix to the above book. The author claims to show that these are the only matrix representations of finite order possible. It seems to the reviewer, however, that the author has made an error, in that he states (in Table II) that the negation of an undesignated value is a designated value; this is not the case, for example, in Lewis's Group III with 1 as the only designated value. This does not affect the author's main thesis in regard to the structure of the matrices of order 4, it being simply necessary to allow more than one choice of designated values in certain cases; but some modifications seem necessary in the proof of the extension to matrices of higher order.

H. B. Curry (State College, Pa.).

**McKinsey, J. C. C.:** On the independence of undefined ideas. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 291—297 (1935).

This is an elementary discussion of the significance of the notion of independence of undefined ideas. This notion is defined in such a way that an idea is to be regarded as dependent on the remaining ideas in a given theory when and only when there is proveable in that theory a theorem to the effect that the given idea is equivalent to a combination of the remaining ideas. The author points out that this notion is correlated with that of independence of postulates, and shows, by an example, that when a primitive idea, dependent in the above sense, is replaced by the corresponding defined one, certain postulates may become dependent which were independent before. An example is also given of a proof of independence by construction of models.

H. B. Curry (State College, Pa.).

**Bouligand, Georges:** Sur les conditions de variance des propositions. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1509—1511 (1935).

Wiederholung der früher mitgeteilten Definition (vgl. dies. Zbl. 11, 98).

W. Feller (Stockholm).

**Lukasiewicz, Jan:** Zur Geschichte der Auslagenlogik. Erkenntnis 5, 111—131 (1935).

**Rougier, Louis:** La scolastique et la logique. Erkenntnis 5, 100—109 (1935).

**Jørgensen, Jörgen:** Einige Hauptpunkte der Entwicklung der formalen Logik seit Boole. Erkenntnis 5, 131—142 (1935).

**Morris, Charles W.:** Some aspects of recent American scientific philosophy. Erkenntnis 5, 142—149 (1935).

**Ajdukiewicz, Kasimir:** Der logistische Antiirrationalismus in Polen. Erkenntnis 5, 151—161 (1935).

**Altshiller-Court, Nathan:** Art and mathematics. Scripta Math. 3, 103—111 (1935).

**Frank, Philipp:** Zeigt sich in der modernen Physik ein Zug zu einer spiritualistischen Auffassung? Erkenntnis 5, 65—80 (1935).



## Algebra und Zahlentheorie.

**Aitken, A. C.:** A useful expansion in applications of determinants. Math. Notes Nr 29, XXV—XXIX (1935).

Die von Schweins 1825 gegebene Entwicklung eines Quotienten zweier Determinanten (die seitdem noch mehrmals wiederentdeckt wurde) ist noch wenig bekannt. Als Beispiel wird die Formel

$$\frac{(a_1 b_2 c_3 d_4)}{(b_2 c_3 d_4)} = a_1 - \frac{a_2 \cdot b_1}{1 \cdot b_2} - \frac{(a_2 b_3)(b_1 c_2)}{b_2(b_2 c_3)} - \frac{(a_2 b_3 c_4)(b_1 c_2 d_3)}{(b_2 c_3)(b_2 c_3 d_4)}$$

angeführt und bewiesen, sodann folgen Anwendungen auf die Herleitung der Newtonschen Interpolationsformel, auf die Umformung einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten und auf die beste Annäherung einer Funktion durch ein Polynom (im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate). *L. Schrutka* (Wien).

**Macdonald, J. A.:** Note on the summation of finite algebraic series. Math. Notes Nr 29, XIII—XX (1935).

Eine elementare Diskussion über die geschlossene Auswertbarkeit von Summen der Form

$$\frac{a_1}{b_1 b_2} + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2 b_3} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_{n+1}},$$

insbesondere in dem Fall, daß  $a_k, b_k$  Polynome in  $k$  sind. Das Hilfsmittel ist die Identität

$$\frac{1}{c+d_1} + \frac{d_1}{(c+d_1)(c+d_2)} + \dots + \frac{d_1 d_2 \dots d_{n-1}}{(c+d_1) \dots (c+d_n)} = \frac{1}{c} \left\{ 1 - \frac{d_1 d_2 \dots d_n}{(c+d_1) \dots (c+d_n)} \right\}.$$

*Rogosinski* (Königsberg i. Pr.).

**Weisner, Louis:** Irreducibility of polynomials of degree  $n$  which assume the same value  $n$  times. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 248—252 (1935).

Verf. beweist folgenden allgemeinen Satz: Sind ganzzahlige  $n, k$  gegeben, so gibt es nur endlichviele, nichtäquivalente, ganzzahlige Polynome  $n$ -ten Grades, die den Wert  $k$  bei  $n$  verschiedenen ganzzahligen Werten des Argumentes annehmen. Dabei nennt er zwei Polynome  $F(x), G(x)$  äquivalent, wenn sie in der Beziehung  $F(x) = \pm G(x+h)$ ,  $h$  ganz, stehen. — Der Verf. gewinnt dies Ergebnis mit Hilfe folgender Hilfssätze: I. Ist  $f(x) = ax(x-t_1) \dots (x-t_{n-1}) \pm k$ ;  $a, k, t_1, \dots, t_{n-1}$  ganz positiv, und sind die Ungleichungen  $2nk < at_1 \dots t_{n-1}$ ,  $2nk < at_j \prod_{i=1}^j (t_i - t_i)$

( $j = 1, \dots, n-1$ ) erfüllt, so sind die Wurzeln von  $f(x)$  reell und liegen innerhalb der Intervalle  $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ ,  $[t_j - \frac{1}{2}, t_j + \frac{1}{2}]$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ). — II. Ist  $\lambda = \lambda(n)$  durch  $\lambda(2) = 1, \lambda(3) = 4, \lambda(4) = 6, \lambda(5) = 3, \lambda(6) = 1, \lambda(n) = 0$  für  $n \geq 7$  definiert und gilt eine (oder mehrere) der  $n$  Ungleichungen

$$a > 2^n k^2 + 1, \quad t_i > (3 + \lambda)k, \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

so ist  $f(x)$  irreduzibel. — Da aber nur endlichviele  $f(x)$  keine dieser Gleichungen befriedigen, so ist damit der Satz bewiesen. *N. Tschebotarow* (Kasan).

**Cattaneo, Paolo:** Sulle soluzioni multiple delle equazioni algebriche. Period. Mat., IV. s. 15, 182—184 (1935).

An Stelle der Bedingungen  $f = 0, f' = 0, f'' = 0, \dots, f^{(r-1)} = 0$  für eine  $r$ -fache Wurzel einer Gleichung kann man, indem man  $f$  homogen macht und den Eulerschen Satz über die homogenen Funktionen anwendet, Bedingungen erhalten, die sämtlich Gleichungen vom selben Grade wie  $f^{(r-1)}$  sind. An einem Beispiel wird dann gezeigt, wie der Grad noch weiter vermindert werden kann. *L. Schrutka* (Wien).

**Young, Alfred:** The application of substitutional analysis to invariants. Philos. Trans. Roy. Soc. London A 234, 79—114 (1935).

Die „erzeugende Funktion“ (e. F.), deren Koeffizienten die Anzahlen der linear-unabhängigen Kovarianten verschiedener Ordnung einer ternären Form  $n$ -ter Ordnung ergeben, ist nach einer früheren Arbeit des Verf. [Proc. London Math. Soc., II. s. 35,

425 (1933); dies. Zbl. 7, 149] gleich  $(1-y)(1-z)\left(1-\frac{z}{y}\right)$  mal der e. F. für Gradienten, d. h. für Potenzprodukte der Formkoeffizienten vom Grade  $\delta$ . Diese letzteren e. F. wird nun auf die Form

$$\Phi_{\delta}^{(n)} = \frac{1}{\delta!} \sum_{\beta} h_{\beta} \prod_1^k X_{\beta_r}^{(n)}$$

gebracht, wo  $\beta$  eine Partitio  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k = \delta$  mit  $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_k$  bedeutet,  $h_{\beta}$  die Anzahl der Elemente in der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_{\delta}$ , die in Zyklen der Grade  $\beta_1, \dots, \beta_k$  zerfallen, und

$$X_{\gamma}^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & x^{(n+2)\gamma} & y^{(n+2)\gamma} \\ 1 & x^{\gamma} & y^{\gamma} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x^{2\gamma} & y^{2\gamma} \\ 1 & x^{\gamma} & y^{\gamma} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ist. Ersetzt man  $h_{\beta}$  durch  $h_{\beta} \chi_{\beta}^{(\alpha)}$ , wo  $\chi_{\beta}^{(\alpha)}$  ein Charakter der  $\mathfrak{S}_{\delta}$  ist, so erhält man die e. F. für Kovarianten von mehreren Grundformen mit bestimmtem Symmetriecharakter. Analoge Ergebnisse gelten für binäre und  $m$ -äre Formen. Läßt man die Ordnung  $n$  der Grundform unbeschränkt wachsen, so erhält man die e. F. für „Perpetuanten“ einer ternären Form in Gestalt einer Potenzreihe

$$(1-x)(1-y)\left(1-\frac{y}{x}\right) \frac{f_{\delta}(x, y)}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^{\delta})(1-y)(1-y^2) \dots (1-y^{\delta})}$$

mit

$$f_{\delta}(x, y) = \sum_{\alpha} x^{\pi} y^{\pi} f_{\alpha_1 \dots \alpha_h}(x) f_{\alpha_1 \dots \alpha_h}(y),$$

$$\pi = (h-1)\alpha_h + (h-2)\alpha_{h-1} + \dots + \alpha_2,$$

wo die  $f_{\alpha_1, \dots, \alpha_h}(z)$  bemerkenswerte Polynome in  $z$  sind, die auch in der e. F. für binäre Perpetuanten auftreten und von der Partitio  $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_h$  mit  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_h$  abhängen. Setzt man zur Abkürzung

$$[m] = 1 - z^m,$$

$$[m]! = (1-z)(1-z^2) \dots (1-z^m),$$

so ist

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_h}(z) = [\delta]! \prod_{r \leq t} [\alpha_r - \alpha_t + t - r] : \prod_r [\alpha_r + h - r]!$$

$$= [\delta]! \left| \frac{1}{[\alpha_r - r - s]!} \right| \quad (r \text{ Zeilen-, } s \text{ Spaltenindex})$$

$$= \frac{1}{\delta!} z^{-\pi} \sum_{\beta} h_{\beta} \chi_{\beta}^{(\alpha)} \frac{[\delta]!}{[\beta_1][\beta_2] \dots [\beta_k]}.$$

van der Waerden (Leipzig).

**Brauer, Richard, and Hermann Weyl: Spinors in  $n$  dimensions.** Amer. J. Math. 57, 425—449 (1935).

Nach Cartan [Bull. Soc. Math. France 41, 53 (1913)] besitzt die orthogonale Gruppe  $\mathfrak{O}_n$  außer den eindeutigen Darstellungen, die durch Ausreduzieren der Tensor-darstellungen gewonnen werden können, noch zweideutige Darstellungen, welche alle aus einer einzigen zweideutigen Darstellung  $\Delta$  vom Grade  $2^n$  (wo  $n = 2\nu$  oder  $n = 2\nu + 1$  ist) erhalten werden können. Das Ziel der Verff. ist nun, diese Darstellung  $\Delta$  algebraisch (statt mit der infinitesimalen Methode) zu gewinnen. Zu dem Zweck wird eine Algebra  $\Pi$  vom Range  $2^n$  konstruiert, deren Basiselemente

$$e_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0 \text{ oder } 1)$$

den Multiplikationsregeln

$$p_i^2 = 1, \quad p_k p_j = -p_j p_k$$

unterworfen sind. Die Algebra ist für  $n = 2\nu$  eine volle Matrixalgebra vom Grade  $2^\nu$  [vgl. D. E. Littlewood, J. London Math. Soc. 9, 41 (1934); dies. Zbl. 8, 194], für  $n = 2\nu + 1$  ist sie direkte Summe von zwei solchen Matrixalgebren. Für  $n = 2\nu$  besitzt die Algebra  $\Pi$  daher eine einzige, für  $n = 2\nu + 1$  zwei irreduzible Darstellungen vom Grade  $2^\nu$ . Setzt man fest, daß das Produkt  $\iota p_1 p_2 \dots p_n$  ( $\iota = 1$  oder  $i$ ) durch die



Einheitsmatrix dargestellt werden soll, so bleibt auch für  $n = 2\nu + 1$  nur eine Darstellung übrig, die mit  $p_j \rightarrow P_j$  bezeichnet wird. — Eine orthogonale Transformation

$$P_j^* = \sum o(jk) P_k$$

führt die Darstellung in eine äquivalente Darstellung über, daher ist

$$P_j^* = S P_j S^{-1}.$$

Die Matrices  $S$ , passend normiert, bilden die gesuchte zweideutige Darstellung  $\Delta$  von  $\vartheta_n$ . Die Vektoren des Darstellungsraumes heißen Spinoren. Die kontragrediente Darstellung  $\bar{\Delta}$  ist äquivalent  $\Delta$ , und das Produkt  $\Delta \times \bar{\Delta}$  ist Summe von Tensordarstellungen  $\Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$  ( $n = 2\nu$ ) bzw.  $\Gamma_0 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_{2\nu}$  ( $n = 2\nu + 1$ ). Das heißt: Aus den Produkten  $\psi^A \bar{\psi}^B$  von zwei Spinoren kann man genau einen Skalar, einen Vektor, einen Tensor 2. Stufe usw. aufbauen. —  $\Delta$  ist irreduzibel. Bei Beschränkung auf die engere orthogonale Gruppe  $\vartheta_n^+$  zerfällt  $\Delta$  im Fall  $n = 2\nu$  in zwei irred. Darstellungen  $\Delta^+$  und  $\Delta^-$ . Im Fall der reellen orthogonalen Gruppe wird, bei beliebiger Signatur der quadratischen Grundform, das Verhalten der konjugiert-komplexen Darstellung  $\bar{\Delta}$  untersucht. — Damit ein Vektor „Stromdichte“ mit positiv-definiter Zeitkomponente als lineare Kombination der Produkte  $\bar{\psi}^A \psi^B$  existiert, muß der Trägheitsindex der Grundform gleich Eins sein. Ist das der Fall, so läßt sich die Diracsche Theorie des Elektrons auf  $n$  Dimensionen übertragen. *van der Waerden* (Leipzig).

**Mori, Shinziro:** Über allgemeine Multiplikationsringe. I. J. Sci. Hiroshima Univ. A 4, 1—26 (1934).

**Mori, Shinziro:** Über allgemeine Multiplikationsringe. II. J. Sci. Hiroshima Univ. A 4, 99—109 (1934).

Unter Zugrundelegung der Krullschen Definitionen [Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Ann. 101 (1929)] wird die Struktur von Ringen untersucht, in denen außer den Ringaxiomen noch folgendes gültig ist: Zu jedem Ideal  $\mathfrak{b}$  aus dem Ring  $\mathfrak{R}$ , das ein echter Teiler von  $\mathfrak{a}$  ist, gibt es ein drittes Ideal  $\mathfrak{c}$ , so daß  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ . In solchen allgemeinen Multiplikationsringen gibt es kein Ideal zwischen  $\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{p}^2$ , wenn  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist.  $\mathfrak{p}$  ist maximal, falls es nicht idempotent ist. Jedes Primärideal ist endliche Potenz eines Primideals. In jedem Ideal  $\mathfrak{a} \neq 0$  mit  $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$  gibt es ein  $\mathfrak{a}$  mit  $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a} \neq 0$ . Besitzt  $\mathfrak{R}$  außer  $\mathfrak{R}$  und  $(0)$  ein Primideal, so ist  $\mathfrak{R}$  idempotent und gleich der direkten Summe  $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ , wo  $\mathfrak{m}_1$  ein Einheitsselement besitzt und  $\mathfrak{m}_2$  idempotent oder Nullideal ist. Für das Weitere ist der kommutative Ring  $\mathfrak{R}$  in irgendeiner Wohlordnung gegeben. Dann ist jedes Ideal aus  $\mathfrak{R}$  mit seinem Kern identisch. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für allgemeine Multiplikationsringe angegeben: Besitzt der Ring  $\mathfrak{R}$ , in dem der Kern jedes Ideals eine kürzeste Darstellung ist, ein echtes Primideal, so ist  $\mathfrak{R}$  dann und nur dann ein Multiplikationsring, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. Für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  gibt es zwischen  $\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{p}^2$  kein Ideal. 2. Ist  $\mathfrak{b}$  echter Teiler von  $\mathfrak{a}$  und  $(\mathfrak{b}^n, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}^{n+1}, \mathfrak{a}) \neq \mathfrak{a}$ , so gibt es ein  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$  mit  $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ . 3. Für jedes  $\mathfrak{a}$  ist  $\mathfrak{a} = \mathfrak{R}\mathfrak{a}$ . 4. Für jedes nicht-maximale Primideal  $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{R}$  ist  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{p}'$ , wenn  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}'$ . *Bruno Schoeneberg.*

**Landherr, Walther:** Über einfache Liesche Ringe. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 11, 41—64 (1935).

Wenn ein einfaches hyperkomplexes System  $\mathfrak{s}_k$  bei algebraischem Abschluß des Grundkörpers  $k$  zu  $\bar{k}$  ein vollreduzibles System  $\mathfrak{s}_{\bar{k}/k}$  ergibt, so besitzt es ein eindeutig bestimmtes „Zentrum“  $Z$  mit folgenden Eigenschaften: 1.  $\mathfrak{s}$  ist  $Z$ -Modul, also ein hyperkomplexes System  $\mathfrak{s}_Z$ . 2. Der Grad von  $Z$  über  $k$  ist gleich der Anzahl der direkten Summanden von  $\mathfrak{s}_{\bar{k}/k}$ . 3.  $\mathfrak{s}_Z$  bleibt bei algebraischer Erweiterung des Grundkörpers  $Z$  einfach,  $\mathfrak{s}_Z$  ist normal, d. h. sein Zentrum ist gleich dem Grundkörper. Dieser Satz ist anwendbar auf Lie-Algebren, soweit ihre volle Reduzibilität durch ein Diskriminantenkriterium geregelt wird. Das Zentrum ist hier nicht die Gesamtheit der mit allen vertauschbaren Elemente, sondern es wird aus der Zerlegung von  $\mathfrak{s}_{\bar{k}/k}$  gewonnen. — Der Hauptgegen-



stand der Arbeit ist die Theorie der normalen einfachen Lie-Algebren (Charakteristika Null), die bei hinreichender Erweiterung des Grundkörpers zu einer Lie-Algebra  $\mathfrak{A}$  vom Typus  $A$  der Cartanschen Klassifikation isomorph werden.  $\mathfrak{A}$  (gleich  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}$ ) ist die Menge der Elemente des Ringes  $\mathfrak{M}$  der  $n$ -reihigen Matrizen, die die Spur Null haben und gemäß  $[XY] = XY - YX$  multipliziert werden; in derselben Weise definiert jede assoziative Algebra  $\mathfrak{R}$  eine „Ableitung“  $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ . Daß  $\mathfrak{s}_{K/k}$  zu  $\mathfrak{A}_k$  äquivalent ist ( $K$  ein Zerfällungskörper ist), kann man auch so ausdrücken:  $\mathfrak{s}_k$  besitzt eine  $n$ -reihige Darstellung (im Sinne von  $\tau(xy) = [\tau(x)\tau(y)]$ )  $x \rightarrow \tau(x)$  durch Matrizen in  $K$ . Grundlegend ist nun das Lemma: Diese Darstellung ist eindeutig bestimmt bis auf 1. Transformation mit regulären Matrizen in  $K$ , 2. Übergang zur negativen gespiegelten Matrix (vgl. A. Weinstein, Der Fundamentalsatz der Tensorrechnung. Math. Z. 16). Zwei Fälle sind nun (invariant) zu unterscheiden. Fall I: Das Polynom  $|\tau(x) - \omega E|$  hat Koeffizienten in  $k$ . Dann ist  $\mathfrak{s}$  die Ableitung einer normalen einfachen assoziativen Algebra  $\mathfrak{R}$  über  $k$ ; zu isomorphen Lie- $AI$ -Algebren gehören isomorphe oder inverse-isomorphe Systeme; jede solche Ableitung führt zu einer  $AI$ -Algebra. Damit ist die Theorie der normalen einfachen  $AI$ -Algebren auf die Theorie der entsprechenden Algebren zurückgeführt und insbesondere bei Zahlgrundkörpern das Isomorphie- und Existenzproblem ( $p$ -adisch) gelöst. — Im Falle II beweist man, daß die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der allgemeinen Darstellungsmatrix  $\tau(x)$  in einem quadratischen Oberkörper  $\Omega$  liegen;  $\mathfrak{s}_\Omega$  ist alsdann  $AI$ -Algebra über  $\Omega$ . Ist jetzt  $k$  ein  $p$ -adischer Körper, so ist  $\mathfrak{s}_\Omega$  bereits Ableitung eines vollen Matrizen Systems (!). Aus dem interessanten Beweisgange seien folgende Einzelheiten hervorgehoben: Das Lemma liefert unter anderem eine Matrix  $T_\varphi$ , die noch gemäß  $T_\varphi^* = S T_\varphi S^{-1}$  abgeändert werden darf. Sie erfüllt

$$T_\varphi^1 + f + f^2 + \dots + f^{m-1} = \alpha E$$

(Potenzieren mit  $f$  heißt Ausüben eines gewissen Automorphismus der Ordnung  $m$  auf die Elemente der Matrix). Im  $p$ -adischen Falle kam man nun, gestützt auf die algebraisch-arithmetischen (nicht die analytisch-topologischen) Eigenschaften der einfachen Algebren,  $\alpha$  zu 1 machen. Rein algebraisch wiederum folgt aus  $\alpha = 1$  die Möglichkeit von  $T_\varphi^* = E$ . Das aber bedeutet in der Theorie zu I, wo  $\mathfrak{R}$  explizit ausgerechnet wird, gerade  $\mathfrak{s}_\Omega \cong \mathfrak{A}_\Omega$ . Dies Ergebnis und Überlegungen über Hermite'sche Formen zu quadratischen ( $p$ -adischen) Erweiterungen  $\Omega/k$  ergibt den folgenden Satz, der für den reellen Grundkörper ein Bestandteil der Cartanschen Theorie ist: Ist das Zentrum  $k$  eines Systems vom Typus  $III$  ein  $p$ -adischer Zahlkörper, so gibt es zu jedem der endlich vielen quadratischen Oberkörper  $\Omega$  von  $k$  für reelle  $p_\infty \left[ \frac{n}{2} \right] + 1$  und für endliche  $p$  ein oder zwei nichtisomorphe Systeme, je nachdem, ob  $n$  ungerade oder gerade ist. Die kennzeichnende Invariante erhält man aus der quadratischen Form  $Sp(x^2)$ .

Zorn (New Haven).

● Weil, André: Arithmétique et géométrie sur les variétés algébriques. (Actualités scient. et industr. Nr. 206. Exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. XI.) Paris: Hermann & Cie. 1935. 16 pag. Frs. 6.—

In seiner Thèse [Acta math. 52, 281 (1929)] hat der Verf. „Idealdistributionen“ auf algebraischen Kurven betrachtet, das sind solche Zuordnungen, welche jedem algebraischen Punkt der Kurve ein Ideal eines algebraischen Zahlkörpers zuordnen. Für diese Distributionen wurde ein Zerlegungssatz definiert, welcher es gestattet, Distributionen in „Primdistributionen“ mit je nur einer Nullstelle zu zerlegen. Jetzt wird diese Theorie mit der Idealtheorie der Funktionenkörper in Zusammenhang gebracht und dadurch zugleich vereinfacht und erweitert. — Es sei  $V$  eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit im projektiven Raum  $S_n$ ,  $\mathfrak{P}$  das zugehörige Primideal in  $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ,  $k$  der Körper der algebraischen Zahlen,  $\Omega_0$  der Restklassenring  $[kx_0, x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{P}$ ,  $\Omega$  der Ring der ganzen Größen des Quotientenkörpers von  $\Omega_0$ . Eine Stelle  $\alpha$  bedeutet einen Homomorphismus von  $\Omega$  auf  $k$ , bei dem die  $x_i$  nicht



alle in Null übergehen. Jede Funktion  $f$  aus  $\Omega$  nimmt an jeder Stelle  $\alpha$  einen Wert  $f(\alpha)$  an. Es sei  $(x)$  der gr.gem. Idealteiler von  $x_0(\alpha), \dots, x_n(\alpha)$ . Es sei  $\mathfrak{A} = (f_1, \dots, f_l)$  ein Ideal von  $\Omega$ , dessen Basiselemente  $f_1, \dots, f_l$  homogene Funktionen der Grade  $d_1, \dots, d_l$  in  $x_0, \dots, x_n$  sind. Dann gehört zu  $\mathfrak{A}$  an jeder Stelle  $\pi$  ein Ideal

$$\mathfrak{a}(\pi) = \left( \frac{f_1(\alpha)}{(x)^{d_1}}, \frac{f_2(\alpha)}{(x)^{d_2}}, \dots, \frac{f_l(\alpha)}{(x)^{d_l}} \right).$$

Diese Ideale, als Funktionen von  $\pi$ , heißen wieder Distributionen. Zu jedem Ideal  $\mathfrak{A}$  gehört also eine Distribution. Nennt man zwei Ideale  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  von  $\Omega$  äquivalent, wenn

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}^c \equiv 0 \ (\mathfrak{B}), \quad \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}^c \equiv 0 \ (\mathfrak{A}), \quad \mathfrak{A} = (x_0, x_1, \dots, x_n),$$

und zwei Distributionen  $\mathfrak{a}(\pi), \mathfrak{b}(\pi)$  äquivalent, wenn es Konstante  $c, d$  gibt mit

$$c \cdot \mathfrak{a}(\pi) \equiv 0 \ (\mathfrak{b}(\pi)), \quad d \cdot \mathfrak{b}(\pi) \equiv 0 \ (\mathfrak{a}(\pi)),$$

so gehören zu äquivalenten Idealen äquivalente Distributionen, zu Teilern Teiler und zu Produkten Produkte. So lassen sich alle bekannten Zerlegungssätze für Ideale auf die entsprechenden Distributionen übertragen. — Ein Ideal  $\mathfrak{A}$  ist äquivalent (1), wenn  $\mathfrak{A}$  keine Nullstellen auf  $V$  hat. Das gilt insbesondere für das Diskriminantenideal einer unverzweigten Überlagerung von  $V$ . Die zugehörige Distribution ist also äquivalent (1).

van der Waerden (Leipzig).

**Reichardt, Hans:** Die Diskriminante einer normalen einfachen Algebra. J. reine angew. Math. 173, 31—34 (1935).

$A$  sei eine normale einfache Algebra vom Grad  $N$  über dem Zahlkörper  $\Omega$ . Die „Diskriminante“  $\Delta(a_1, \dots, a_N)$  von  $N^2$  Elementen aus  $A$  sei die  $N^2$ -reihige Determinante  $|s(a_i a_j)|$ , wobei  $s(a)$  die Spur von  $a$  in einer absolut irreduziblen Darstellung von  $A$  bedeutet. Durchlaufen  $a_1, \dots, a_N$  die Zahlen einer Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$ , so heißt das Vereinigungsideal aller dazugehörigen  $\Delta(a_1, \dots, a_N)$  die Diskriminante  $\mathfrak{d}$  von  $A$  (sie ist unabhängig von  $\mathfrak{o}$ ). Es ist  $\mathfrak{d} = \prod_p \mathfrak{p}^{(1 - \frac{1}{n})N^2}$ ,  $n$  der  $\mathfrak{p}$ -Index von  $A$ .  $\mathfrak{d}$  ist

ferner die bezüglich der regulären Darstellung von  $A$  über  $\Omega$  gebildete Norm der Differente von  $A$ .  $\mathfrak{d}$  läßt eine Darstellung als größter gemeinsamer Teiler von endlich vielen Zahldiskriminanten zu. Eine Beziehung zwischen  $\mathfrak{d}$  und den Diskriminanten der maximalen Galoisschen Teilkörper von  $A$  wird abgeleitet. Bezüglich einer anderen, mit Hilfe der regulären Darstellung von  $A$  definierten Diskriminante vgl. die Arbeiten von Shoda und Nakamura [Proc. Imp. Acad. Jap. 10, 315—321, 443—446, 447—449 (1934); dies. Zbl. 9, 291; 10, 195].

Köthe (Münster i. W.).

**Rado, Richard:** A remark on Minkowski's theorem about linear forms. J. London Math. Soc. 10, 115 (1935).

Die vom Verf. kürzlich (J. London Math. Soc. 9, 164—165 (1934); dies. Zbl. 9, 245) zum Beweise des Minkowskischen Linearformensatzes angewandte Methode führt zu folgendem weiteren Satz: Gegeben seien  $n$  lineare Formen  $L_r(x_1, \dots, x_n) = L_r(x)$  ( $1 \leq r \leq n$ ) mit rationalen Koeffizienten und der Determinante  $D \neq 0$ , ferner  $n$  positive Zahlen  $b_r$  derart, daß  $b_1 b_2 \dots b_n = |D|$ ; dann gibt es entweder  $n$  ganze Zahlen  $g_s$ , die nicht alle Null sind, für die  $|L_r(g)| < b_r$  ( $r = 1, \dots, n$ ) gilt, oder  $n$  ganze Zahlen  $g_s$ , für die  $|L_1(g)| = b_1$  und  $|L_r(g)| \leq \frac{1}{2} b_r$  ( $r = 2, \dots, n$ ) gilt.

Bessel-Hagen (Bonn).

**Hofreiter, Nikolaus:** Zur Geometrie der Zahlen. II. Mh. Math. Phys. 42, 101—112 (1935).

Verf. setzt seine Untersuchungen „Zur Geometrie der Zahlen“ (Mh. Math. Phys. 40, 181—192; dies. Zbl. 6, 393) fort und zeigt folgende Sätze: I. Wenn im  $R_5$  die ersten 5 Minima gleich sind, so kann man nicht immer 5 Minima auswählen, die ein Fundamentalparallelepiped erzeugen. II. Wenn in einem  $R_5$  mindestens 6 gleiche Minima existieren, unter denen 5 erste Minima vorkommen, so kann man stets 5 Minima auswählen, die ein Fundamentalparallelepiped erzeugen. III. Im  $R_6$  können 6 erste



Minima existieren, die kein Fundamentalepipiped erzeugen. IV. Im  $R_6$  kann es 7, bzw. 9 gleiche Minima geben, unter denen 6 erste Minima vorkommen, während sich keine 6 Minima auswählen lassen, die ein Fundamentalparallelepiped erzeugen. V. Wenn im  $R_6$  mindestens 10 gleiche Minima existieren, unter denen 6 erste Minima vorkommen, so kann man stets 6 Minima auswählen, die ein Fundamentalparallelepiped erzeugen.

Mahler (Groningen).

**Hofreiter, Nikolaus:** Über die Minima von positiven ternären Hermiteschen Formen. *Mh. Math. Phys.* 42, 113—116 (1935).

In der ternären positiven quadratischen Form  $F$  mit der Determinante  $\Delta$  mögen  $x, y, z$  alle ganzen Zahlen des imaginär quadratischen Zahlkörpers  $K(\sqrt{-m})$  und  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  die hierzu konjugierten Zahlen durchlaufen. Das Minimum  $M$  von  $F$  genügt dann der Ungleichung

$$M^6 \leq \frac{2^6 \mu^6 m^3 \Delta^2}{3} \quad \text{mit} \quad \mu = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } m \equiv 3 \pmod{4}, \\ 1 & \text{für } m \not\equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Man zeigt dies, indem man die Variablen durch ihre Basisdarstellung ersetzt und damit  $F$  in eine positive reelle quadratische Form in 6 Veränderlichen umwandelt, auf die sich die bekannten Schranken für das Minimum anwenden lassen.

Mahler (Groningen).

**Chowla, S.: On sums of powers.** *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 1, 528—530 (1935). The number  $N(k)$  is the least value of  $m$  such that

$$a_1^n + \dots + a_m^n \leq b_1^n + \dots + b_m^n \quad (1 \leq n \leq k)$$

has a non-trivial solution in which the  $a$  and the  $b$  are positive integers. Wright has proved that  $N(18) \leq 80$  and deduced that  $N(k) = O((160)^{k/19})$  (this *Zbl.* 10, 103). The author improves Wright's numerical calculations to prove that  $N(18) = 68$ , and hence  $N(k) = O((136)^{k/19})$ .

Maitland Wright (Oxford).

**Chowla, S.: A theorem on sums of powers with applications to the additive theory of numbers.** *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 1, 698—700 (1935).

The notation is that given in the prec. rev. The author proves that  $N(k) \leq \frac{1}{2}(k^2 + k) + 1$ , and deduces from this that  $v(k) = O(k^2)$  for an infinity of  $k$ , where  $v(k)$  is the function defined by Wright (this *Zbl.* 10, 103).

Maitland Wright (Oxford).

**Chowla, S., and S. Sastry:** On sums of powers. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 1, 534—535 (1935).

The notation is that given in this *Zbl.* 9, 299 (Subba Rao). The authors give a numerical example of  $(9)^{10} = (9)^{10}$ , using a result and a method due to Tarry (see Dickson, *History of the Theory of Numbers* 2, 710). Maitland Wright (Oxford).

**Huston, Ralph E.: Asymptotic generalizations of Waring's theorem.** *Proc. London Math. Soc., II. s.* 39, 82—115 (1935).

The author investigates the problem of determining for what value of  $s$  and what sets of positive integral coefficients  $a_1, \dots, a_s$ , the diophantine equation

$$n = \sum_{v=1}^s a_v h_v^k \quad (h_v \geq 0)$$

is soluble for every sufficiently large integer  $n$ . It is sufficient that  $s \geq s_0 = (k-2)^{k-1} + 5$ , and that the corresponding "singular series" should be greater than a positive number independent of  $n$ .  $P$  is defined for every prime  $p$  as follows: if  $p = 2$ ,  $p^\theta \nmid k$ ,  $p^{\theta+1} \nmid k$ , then  $P = p^{\theta+2}$ ; if  $p > 2$ ,  $p^\theta \mid k$ ,  $p^{\theta+1} \nmid k$ , then  $P = p^{\theta+1}$ . Then the "singular series" satisfies the required condition if, for every  $n$  and every  $P$ , there is a solution of

$$\sum_{v=1}^s a_v h_v^k \equiv n \pmod{P}$$

for which  $p \nmid (a_1 h_1, a_2 h_2, \dots, a_s h_s)$ . A set of coefficients  $a$  are said to be admissible if the latter condition is satisfied. So far the proof is a straightforward generalisation



of Hardy and Littlewood's standard method for the ordinary Waring's Problem. — The author develops the theory of admissible sets by methods of his own. He writes

$$r = \frac{P-1}{p-1}(k, p-1)$$

and proves that a set of coefficients is admissible (I) if at least  $r+1$  of the  $a$  are prime to  $p$  for every prime  $p$ , (II) if at least  $4k$  of the  $a$  are prime to  $p$  for every prime  $p$ , or (III) if  $4k+1$  of the  $a$  are relatively prime in pairs. A set of  $a$  is of "primitivity  $m$ " if for every  $p$  at least  $m$  of the  $a$  are prime to  $p$ . Then a set is admissible if  $k$  is odd and (I) if the set is of primitivity  $k+2$ , or (II) if the set is of primitivity  $k+1$  and contains a subset with highest common factor 1 for which, with appropriate choice of signs,  $\sum \pm a_v = 0$ . Further criteria for admissible sets are given and the cases  $k=3$  and  $k=4$  worked out in detail.

Maitland Wright (Oxford).

## Gruppentheorie.

Zia-ud-Din, M.: The characters of the symmetric group of order 11!. Proc. London Math. Soc., II. s. 39, 200—204 (1935).

Senior, J. K., and A. C. Lunn: Determination of the groups of orders 162—215 omitting order 192. Amer. J. Math. 57, 254—260 (1935).

Die im Titel genannten Gruppen werden, soweit sie nicht schon vorher untersucht waren, vollständig aufgezählt. Die von den Verff. benutzten Methoden sind dieselben wie die in einer früheren Arbeit derselben [Amer. J. Math. 56, 328—338 (1934); dies Zbl. 9, 201] benutzten.

Magnus (Princeton).

Terry, Henrietta: Abelian subgroups of order  $p^m$  of the I-groups of the Abelian groups of order  $p^n$  and type 1, 1, 1, .... Duke math. J. 1, 27—34 (1935).

Im Anschluß an Untersuchungen von H. R. Brahana [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18, 722 (1932) und Amer. J. Math. 56, 490—510 (1934); dies. Zbl. 6, 7 und 10, 153; vgl. die dort erklärten Bezeichnungen] werden in der  $p$ -Sylowgruppe  $J_p$  der Automorphismengruppe  $J$  einer Abelschen Gruppe  $H$  der Primzahlpotenzordnung  $p^n$  und vom Typ  $(1, 1, \dots, 1)$  die maximalen Abelschen Untergruppen untersucht, die ein zu einer Zerlegung  $n = \sum n_i$  gehöriges Element enthalten. Insbesondere wird ihre Ordnung angegeben. Ferner werden die nicht ineinander transformierbaren Untergruppen der Ordnung  $p^2$  von  $J_p$  untersucht und in Spezialfällen völlig aufgezählt.

Magnus (Princeton).

Zassenhaus, Hans: Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 11, 17—40 (1935).

Es werden alle dreifach transitiven Permutationsgruppen vom Grade  $n+1$  konstruiert, die die kleinstmögliche Ordnung  $(n+1) \cdot n \cdot (n-1)$  haben. Die Gesamtheit aller Kollineationen  $z' = \frac{az+b}{cz+d}$  mit Koeffizienten aus einem Galoisfeld  $K$  mit  $n$  Elementen ergibt eine Gruppe von Permutationen der  $n$  Körperelemente und des Symbols  $\infty$ , die die genannten Eigenschaften besitzt. Die Zahl  $n$  ist hier eine Primzahlpotenz. Dazu kommt nun noch eine weitere Klasse von derartigen Permutationsgruppen  $M_n$ , die definiert ist, wenn  $n$  das Quadrat einer ungeraden Primzahlpotenz ist. Im Spezialfall  $n=9$  ist  $M_n$  die von Mathieu gefundene dreifach transitive Permutationsgruppe. Beim Beweis und bei der Konstruktion von  $M_n$  spielt der Begriff des Fastkörpers eine Rolle. Darunter wird eine nichtleere Menge  $K$  von Elementen mit folgenden Eigenschaften verstanden: 1. In  $K$  ist eine assoziative und umkehrbare Addition definiert. 2. Für die Elemente  $a$  einer nichtleeren Teilmenge  $M$  von  $K$  ist ein rechtsseitiges Produkt  $ax$  mit den Elementen  $x$  von  $K$  definiert. Dabei soll  $M$  mit  $a$  und  $b$  auch  $ab$  enthalten, und es soll  $a(bx) = (ab)x$  gelten. Aus  $ax=0$  soll  $x=0$  folgen; aus  $ax=bx$  und  $x \neq 0$  soll  $a=b$  folgen. 3. Es ist  $a(x+y) = ax+ay$ . Die Gesamtheit der Transformationen  $\pi(z) = az+b$  ( $a$  in  $M$ ,  $b$  in  $K$ ) liefert eine



Gruppe von Permutationen der Elemente von  $K$ . Alle transitiven Permutationsgruppen, bei der jede Permutation eindeutig durch das Bild von zwei Permutationssymbolen festgelegt ist, können in dieser Weise erhalten werden. Durch Hinzunahme einer weiteren Permutation, die eine Reihe von Bedingungen zu erfüllen hat, kann man dann die zweifach transitiven Permutationsgruppen konstruieren, in denen jede Permutation eindeutig durch das Bild von drei Permutationssymbolen bestimmt ist.

*R. Brauer (Princeton).*

**Littlewood, D. E.:** Group characters and the structure of groups. Proc. London Math. Soc., II. s. 39, 150—199 (1935).

Ist  $H$  eine Gruppe, deren Charaktere bekannt sind, und  $G$  eine Untergruppe, so erzeugt die Eins-Darstellung von  $G$  einen zusammengesetzten Charakter von  $H$ . In dieser Weise läßt sich jede Untergruppe  $G$  durch einen zusammengesetzten Charakter von  $H$  bestimmen. Es werden nun 1. Kriterien dafür angegeben, die es gestatten, aus den zusammengesetzten Charakteren von  $H$  diejenigen auszusuchen, welche zu Untergruppen  $G$  gehören; 2. wird angegeben, wie man aus der Charaktertabelle von  $H$  die von  $G$  berechnen kann; 3. wird angegeben, wie man die wichtigsten Eigenschaften von  $G$  aus der Charaktertabelle von  $G$  entnehmen kann. Anwendungen auf die Untergruppen der symmetrischen Gruppen der Grade 4, 5, 7, 8 und 9. Alle angewandten Methoden beruhen auf Sätzen von Frobenius. *van der Waerden.*

**Kampen, E. R. van:** The structure of a compact connected group. Amer. J. Math. 57, 301—308 (1935).

Es sei  $F$  ein kompakter und zusammenhängender Gruppenraum,  $S(k)$  für  $k=1, 2, 3, \dots$  alle seine (lokal) einfachen (kompakten) Lieschen Normalteiler,  $\overline{S(k)}$  die einfache Gruppe, deren Zentrum nur die Gruppeneins enthält, und die im kleinen isomorph mit  $S(k)$  ist,  $S(k)^*$  die einfach zusammenhängende, mit  $S(k)$  im kleinen isomorphe Gruppe,  $S$  die von den  $S(k)$  erzeugte Untergruppe von  $F$ ,  $C$  das Zentrum von  $F$ ,  $A$  das von  $S$  und  $K$  die Komponente der Gruppeneins in  $C$ . Dann ist  $A$  der Durchschnitt von  $C$  und  $S$ , null-dimensional und  $F/A$  ist einstufig isomorph dem direkten Produkt von  $C/A$  und den  $\overline{S(k)}$ . Insbesondere ist also  $F$  direktes Produkt einfacher Liescher Gruppen, wenn sein Zentrum nur die Gruppeneins enthält. —  $F$  ist dann und nur dann im kleinen zusammenhängend, wenn  $C/A$  es ist. — Ist  $D$  das direkte Produkt der  $S(k)^*$  mit  $K$ , so existiert ein bis auf Automorphismen von  $D$  eindeutig bestimmter Normalteiler  $B$  von  $D$ , der mit  $K$  nur die Gruppeneins gemein hat, so daß  $F$  und  $D/B$  einstufig isomorph sind. — Diese Resultate werden gewonnen, indem der Satz von Pontrjagin [vgl. L. Pontrjagin, C. R. Acad. Sci., Paris 198, 238 (1934); dies. Zbl. 8, 246], daß jede die Gruppeneins enthaltende offene Teilmenge von  $F$  einen abgeschlossenen Normalteiler  $H$  mit Lieschem  $F/H$  enthält, auf ein vollständiges Umgebungssystem der Gruppeneins angewandt wird.

*Reinhold Baer (Manchester).*

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Whyburn, G. T.:** Generalized perfect sets. Duke math. J. 1, 35—38 (1935).

In einem metrischen Raum  $C$  sei eine beliebige Klasse  $K$  abgeschlossener Mengen gegeben. Unter der  $K$ -Derivierten  $K(A)$  einer Menge  $A$  versteht Verf. die Menge aller Punkte  $x$ , deren jede Umgebung eine Teilmenge von  $A$  enthält, welche in keiner  $K$ -Menge liegt [Amer. J. Math. 54, 169—175 (1932); dies. Zbl. 3, 329]. Diese Deriviertenbildung läßt sich in üblicher Weise bis ins Transfinite iterieren. Eine Menge  $A$  nennt Verf.  $K$ -perfekt, wenn  $K(A) = A$  ist, und beweist: Jede abgeschlossene Menge  $A$  ist Summe einer  $K$ -perfekten Menge und von abzählbar vielen Mengen, welche Durchschnitte von  $A$  mit  $K$ -Mengen sind; eine in sich kompakte Menge  $A$  ist genau dann in der Summe von abzählbar vielen  $K$ -Mengen enthalten, wenn  $A$  keine  $K$ -perfekte Teilmenge enthält. — Man erhält die üblichen Begriffe und bekannte Sätze, wenn  $K$



als System aller einpunktigen Mengen von  $C$  ist. — Sind  $K_1$  und  $K_2$  zwei Systeme abgeschlossener Mengen und enthält keine  $K_1$ -Menge eine  $K_2$ -perfekte Teilmenge, so ist jede  $K_2$ -perfekte Menge auch  $K_1$ -perfekt. Zum Schluß zeigt Verf., daß die verallgemeinerten Derivierten von Hurewicz [Fundam. Math. 23, 54 (1934); dies. Zbl. 10, 40] mit den seinen äquivalent sind.

Nöbeling (Erlangen).

Whyburn, G. T.: A decomposition theorem for closed sets. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 95—96 (1935).

Es sei  $E$  eine Eigenschaft einer Punktmenge  $K$  bezüglich eines Punktes  $p$ , so daß folgendes gilt: 1. Kommt  $E$  einer Umgebung von  $p$  (in  $K$ ) bezüglich  $p$  zu, so auch ganz  $K$ ; 2. hat umgekehrt  $K$  bezüglich  $p$  die Eigenschaft  $E$ , so auch jede Umgebung von  $p$ ; 3. ist  $K$  kompakt, so ist die Menge  $N$  aller Punkte von  $K$ , bezüglich welcher  $K$  die Eigenschaft  $E$  nicht hat, entweder leer oder  $\bar{N}$  mindestens eindimensional (Beispiele für  $E$ : lokaler Zusammenhang;  $\dim < n$ ). Verf. beweist: Ist  $K$  kompakt und  $E$  herbarhalb halbstetig zerlegt (R. L. Moore, Found. of Point Set Theory, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. 1932, Kap. 5) in die Komponenten von  $\bar{N}$  und die Punkte von  $K - \bar{N}$ , so hat der Zerlegungsraum (Hyperraum)  $H$  in jedem seiner Punkte die Eigenschaft  $E$ .

Nöbeling (Erlangen).

Sierpiński, W.: Sur une propriété du segment. Sonderdruck aus: Prace mat.-fiz. 43, S. (1935).

Bekanntlich gibt es (unter Zugrundelegung des Auswahlaxioms) 1. Zerlegungen der Kugel in drei zueinander punktfremde und (durch Drehung der Kugel) miteinander kongruente Teilmengen, deren bereits zwei, in geeignete (ebenfalls punktfremde) Lagen durch Kugeldrehung gebracht, dieselbe Kugel lückenlos ausfüllen (Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, S. 469. Leipzig 1914); 2. Zerlegungen der Kugel in endlich viele punktfremde Teilmengen, die einzeln durch Bewegung in solche (ebenfalls punktfremde) Lagen gebracht werden können, daß sie eine größere Kugel genau ausfüllen (Banach und Tarski, Fundam. Math. 6, 263 (1924)). Dagegen kann man weder in 1. noch in 2. das Wort „Kugel“ durch „Kreis“ und ebensowenig durch „Strecke“ ersetzen. Dennoch gibt es — wie es Verf. nun (auch aus dem Auswahlaxiom) herleitet — eine Zerlegung der Strecke in drei punktfremde Mengen  $A, B, C$ , die durch eine passende Verschiebung von  $B$  und  $C$  in gewisse zueinander und zu  $A$  punktfremde Lagen eine echte Obermenge dieser Strecke ausfüllen. Die Anzahl drei ist nicht herabsetzbar. Die Differenzmenge kann unter Umständen perfekt (und effektiv), aber auch unmeßbar gewählt werden; es gibt also auf der Zahlengeraden unmeßbare Mengen, deren alle möglichen linearen Banachschen Maße  $= 0$  sind. B. Knaster.

Sierpiński, W.: Une propriété du nombre  $\aleph_2$  et l'hypothèse du continu. C. R. Soc. Sci. Varsovie 27, 128—129 (1934).

Sierpiński, W.: Le théorème de Souslin dans la théorie générale des ensembles. Fundam. Math. 25, 29—32 (1935).

En vertu d'un théorème de Souslin, à tout couple d'ensembles analytiques disjoints  $A$  et  $B$  il correspond un couple d'ensembles boreliens disjoints  $P$  et  $Q$  tels que  $A \subset P$  et  $B \subset Q$ . Ce théorème démontré d'abord pour les ensembles linéaires est, comme on sait, valable pour tout espace séparable complet [cf. Hausdorff, Mengenlehre 1927, 191—193, 276—277; Kuratowski, Topologie I, Monografie Matematyczne 1933, 249—251]. M. Sierpiński va encore plus loin et démontre le théorème en question dans une forme abstraite valable pour des ensembles tout-à-fait arbitraires: Soient  $S = S\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$  et  $T = T\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$  deux systèmes déterminants à noyaux  $N(S)$  et  $N(T)$  respectivement, et supposons que pour tout couple de suites d'entiers positifs  $\{p_k\}$  et  $\{q_k\}$  il existe une valeur  $s$  telle que les ensembles  $E_{p_1 \dots p_s}$  et  $H_{q_1 \dots q_s}$  soient disjoints. Alors il existe deux ensembles disjoints  $P$  et  $Q$  appartenant respectivement aux familles  $\mathfrak{B}(S)$  et  $\mathfrak{B}(T)$  d'ensembles et tels que  $N(S) \subset P$  et  $N(T) \subset Q$  (étant donnée une famille  $F$  d'en-



sembles,  $\mathfrak{B}(F)$  désigne la plus petite famille contenant  $F$  et close par rapport aux opérations d'addition et de multiplication d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles. Une généralisation analogue est signalée pour le théorème récent de Novikoff-Liapunoff concernant une infinité dénombrable de systèmes déterminants [voir Novikoff C. R. Acad. Sci. URSS 3, 145—148 (1934); ce Zbl. 10, 12; Liapunoff, ibid. 276—280; ce Zbl. 9, 105].

Saks (Warszawa).

Blanc, Eugène: Sur la notion de distance. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1646—1647 (1935).

In einem allgemeinen metrischen Raum braucht bekanntlich die abgeschlossene Hülle einer offenen Kugel (Entfernung  $< r$ ) nicht mit der abgeschlossenen Kugel (Entfernung  $\leq r$ ) mit selbem Radius und Mittelpunkt identisch zu sein. Ohne Beweis wird nun die notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß dies der Fall sei: Sind  $A$  und  $B$  zwei Punkte mit der Entfernung  $a$ , so soll es in beliebiger Umgebung von  $B$  Punkte geben, deren Entfernung von  $A$  kleiner ist als  $a$ . Diese Eigenschaft wird quasi-convexité locale genannt; sie ist nicht topologischer Natur. W. Feller.

Vickery, C. W.: Spaces in which there exist uncountable convergent sequences of points. Tôhoku Math. J. 40, 1—26 (1935).

The spaces studied are obtained from spaces studied by Fréchet and R. L. Moore by replacing sequences of integers by regular, possibly transfinite, sequences of ordinals. Many of the classical theorems on sets of points hold for these spaces. They provide examples of points which are limit points but not sequential limit points, connected and locally connected sets which are not arcwise connected. The following definition of arc is used. An arc is a closed, connected, perfectly-compact point set  $M$  containing two distinct points  $A$  and  $B$  such that  $M$  is disconnected by the omission of any point of  $M - A - B$ . Under this definition an arc need not be separable, so that in some spaces two arcs will exist which are not homeomorphic. E. W. Chittenden (Iowa).

Popruženko, G.: Über eine Eigenschaft des regulären Maßes. Mh. Math. Phys. 42, 85—86 (1935).

Der Autor zeigt, daß eine von W. Sierpiński, Fundam. Math. 13, 195—200 (1929) unter Annahme der Kontinuumhypothese konstruierte, lineare Menge sich auffassen läßt als ein metrischer Raum, für den es eine beschränkte, stetige Inhaltsfunktion  $\varphi(x)$  gibt mit der Eigenschaft, daß der  $\sigma$ -Körper aller  $\varphi$ -meßbaren Mengen mit dem  $\sigma$ -Körper der Borelschen Mengen dieses Raumes identisch ist. J. Rdder (Groningen).

Borel, Émile: Sur les ensembles de mesure nulle. Fundam. Math. 25, 7—12 (1935).

Ist  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  eine in  $(0, 1)$  überall dichte Punktmenge,  $E_k$  die Gesamtheit der Intervalle  $\left(a_n - \frac{\varphi(n)}{k}, a_n + \frac{\varphi(n)}{k}\right)$  ( $\varphi(n) > 0$ ,  $\sum \varphi(n)$  konvergent),  $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ , so ist  $E$  eine Nullmenge. Eine Klassifikation dieser Art von Nullmengen hat Verf. früher (z. B. in seinem Buch „Méthodes et problèmes des théories des fonctions“, S. 38. Gauthier Villars 1922.) angegeben. Hier wird auf eine enge Beziehung hingewiesen, die zwischen dieser Klassifikation und der von Besicovitch (dies. Zbl. 9, 395) eingehend untersuchten allgemeinen Hausdorffschen Nullmengeneinteilung besteht. Namentlich entspricht der Hausdorffschen Dimensionszahl  $\sigma$  die Klasse der Mengen  $E$  mit  $\varphi(n) = n^{-s}$ ,  $s = \sigma^{-1}$ .

A. Khintchine (Moskau).

Adams, C. R., and Hans Lewy: On convergence in length. Duke math. J. 7, 19—26 (1935).

By replacing the total variation of a function  $f(x)$  ( $T_a^b f$ ) in a paper by Adams and Clarkson [this Zbl. 9, 306 (1934)] by length of  $f(L_a^b f)$ , defined as the least upper bound of  $\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$  for subdivisions of  $(a, b)$ , the authors obtain the notion of convergence in length, viz.  $f_n(x) \rightarrow f_0(x)$  for every  $x$ , and  $L_a^b f_n \rightarrow L_a^b f_0$ . Convergence in length implies convergence in variation but not conversely. Interesting is that convergence in length is invariant under addition and multiplication if



the limit functions are absolutely continuous, a consequence of the theorems that if  $f_n \rightarrow f_0$  in length and  $f_0$  is absolutely continuous then  $T_a^b(f_n - f_0) \rightarrow 0$ , and if  $f_n(x) \rightarrow f_0(x)$  for every  $x$ ,  $T_a^b(f_n - f_0) \rightarrow 0$ , and  $f_0$  is of bounded variation then  $f_n \rightarrow f_0$  in length.

*Hildebrandt* (Ann Arbor).

**Jarník, Vojtěch:** Sur la dérivabilité des fonctions continues. Publ. Fac. Sci. Univ. Charles Prague Nr 129, 1—9 (1934).

L'auteur démontre: Dans l'espace  $C$  des fonctions continues, définies dans le segment  $[0, 1]$  (avec la définition usuelle de l'écart), il existe un résiduel  $A$ , tel que pour chaque fonction  $x(t) \in A$  on peut faire correspondre à chaque  $t \in [0, 1]$ : 1° un ensemble  $E_1$ , dont la densité supérieure droite au point  $t$  est égale à un et tel que

$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}$  existe et soit égale soit à  $+\infty$  soit à  $-\infty$ ; 2° un ensemble  $E_2$  dont

densité supérieure symétrique au point  $t$  est au moins égale à  $1/2$  et tel que

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t} = \infty.$$

*J. Ridder* (Groningen).

**Quade, E. S.:** The category of the class  $\text{Lip}(\alpha, p)$ . Bull. Amer. Math. Soc. 41, 83—84 (1935).

Es wird gezeigt: Die Menge der Funktionen aus  $L_p$  ( $p \geq 1$ ), die einer verallgemeinerten Lipschitzbedingung  $\text{Lip}(\alpha, p)$  mit passendem  $\alpha$  aus  $0 < \alpha \leq 1$  genügen, ist von der ersten (Baireschen) Kategorie in  $L_p$ . Das gleiche trifft zu, wenn die Funktionen aus  $L_p$  durch die stetigen Funktionen ersetzt werden.

*R. Schmidt* (Kiel).

**Vulich, B.:** Quelques théorèmes sur les suites de fonctions discontinues. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 357—360 u. franz. Text 360—363 (1935) [Russisch].

Etant donnée une suite de fonctions dans  $[0, 1]$  appartenant à une classe de Young l'auteur établit des conditions pour qu'une fonction limite (ordinaire, supérieure ou inférieure) appartienne à la même classe ou, tout au moins, à une classe moins élevée que celle qui se présente dans le cas tout-à-fait général. Les critères obtenus sont basés sur certaines propriétés d'une décomposition de l'intervalle  $[0, 1]$  qu'on fait correspondre à la suite donnée. La note se rattache à une note de M. Gageff [Fundam. Math. 3, 182 (1932); ce Zbl. 4, 205] dont certains résultats sont généralisés. *Saks*.

**Takahashi, Tatsuo:** On the sequence of functions. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., II. s. 17, 73—77 (1935).

Suppose that  $Q_n(x)$  is defined in  $(0, \infty)$  and: 1°  $Q_n(0) = 0$ ; 2° there is a constant  $P$  independent of  $n$  such that  $PQ_n^2(x) \geq Q_n(x^2)$  for  $x \leq \delta$ ; 3°  $Q_n(x)$  is increasing and positive for each  $n$ . — If  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_m^\infty Q_n(|f_n(x) - f(x)|) dx = 0$ , we say that  $f_n(x)$  is convergent to  $f(x)$  in mean with respect to the sequence of functions  $Q_n(x)$ . If there is a

constant  $\alpha$  such that: 4°  $\sum_{n=1}^\infty Q_n(x)$  is convergent for  $x \leq \alpha$ ; 5° and the sequence  $\{f_n(x)\}$

converges to  $f(x)$  in mean with respect to the sequence  $Q_n(x)$ ; then  $f(x)$  converges to  $f(x)$  almost everywhere in  $\mathfrak{M}$ . If  $Q_n(x) < M$  for  $x = \alpha$ , and all  $n$ , it follows from conditions 1°, 2°, and 3°, that condition 4° is necessary for the validity of the theorem.

*Chittenden* (Iowa City, Iowa).

**Banach, Stefan:** Sur un théorème de M. Sierpiński. Fundam. Math. 25, 5—6 (1935).

L'auteur donne une démonstration simple d'un théorème de Sierpiński, Fundam. Math. 24, 209 (1935); ce Zbl. 11, 106.

*J. Ridder* (Groningen).

## Analysis.

**Krawtchouk, Michel:** Sur quelques inégalités dans le problème des moments. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1567—1569 (1935).

The author generalizes his earlier results published in C. R. Acad. Sci., Paris 196, 39 (1933); this Zbl. 6, 196.

*I. S. Sokolnikoff* (Madison).



**Heins, A. E.: Note on the equation of heat conduction.** Bull. Amer. Math. Soc. 41 253—258 (1935).

In this paper the Fourier-integral theorem for several variables is stated (for Riemann integrals) and the Mellin transform given. The classical solution of the equation of heat-conduction in three dimensions is derived as an application of the Fourier-transform theorem. *Murnaghan* (Baltimore).

**Izumi, Shin-ichi: On the generalized Fourier integrals. I.** Sci. Rep. Tohoku Univ. I. s. 23, 880—906 (1935).

Nach N. Wiener und S. Bochner kann man eine Funktion  $f(x)$ , für welche  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| (1 + |x|)^{-1} dx < \infty$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) durch ein verallgemeinertes Fouriersches Integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{-0}^{\infty} \left\{ \cos \nu x \frac{d^k \Phi_k(\nu)}{d\nu^{k-1}} + \sin \nu x \frac{d^k \Psi_k(\nu)}{d\nu^{k-1}} \right\} d\nu$$

darstellen. Insbesondere hat man für passende Funktionen  $\gamma(t)$ , ( $0 \leq t < \infty$ ), für alle  $A < B$  die Relation

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_A^B \left| \pi f(x) - \int_0^{\infty} \gamma\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) \left\{ \cos \nu x \frac{d^k \Phi_k(\nu)}{d\nu^{k-1}} + \sin \nu x \frac{d^k \Psi_k(\nu)}{d\nu^{k-1}} \right\} d\nu \right| dx = 0.$$

Wenn man sich insbesondere für solche Funktionen  $\gamma(t)$  interessiert, welche sich in  $0 < t < 1$  wie  $(1-t)^\alpha$  verhalten und für  $t > 1$  verschwinden (Cesaro-Rieszsche Summation), so genügt es nach Verf.,  $\alpha$  größer als  $\left[\frac{k}{2}\right]$  zu wählen. — Außerdem werden gewisse auf die Fälle  $k = 1, 2$  bezügliche Sätze von Hahn und Burkill präzisiert. *Bochner* (Princeton).

**Izumi, Shin-ichi: On the generalized Fourier integrals. II.** Sci. Rep. Tohoku Univ. I. s. 23, 907—919 (1935).

Falls  $1 < \alpha \leq 2$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| (1 + |\xi^\alpha|)^{-1} d\xi < \infty$ , dann gilt für fast alle  $x$

$$\pi f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\lambda} \left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \left( \cos \nu x \frac{d^\alpha \Phi_\alpha(\nu)}{d\nu^{\alpha-1}} + \sin \nu x \frac{d^\alpha \Psi_\alpha(\nu)}{d\nu^{\alpha-1}} \right) d\nu.$$

Hierin sind  $\Phi_\alpha(\nu)$  und  $\Psi_\alpha(\nu)$  die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) C_\alpha(\nu \xi) d\xi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) S_\alpha(\nu \xi) d\xi,$$

wobei  $C_\alpha(\xi)$  und  $S_\alpha(\xi)$ , für  $\xi \geq 0$ , passend normierte unbestimmte Integrale  $\alpha$ -ter

Ordnung der Funktionen  $\cos \xi$  und  $\sin \xi$  sind, und  $\int_a^b g(\xi) \frac{d^\alpha f(\xi)}{d\xi^{\alpha-1}}$  als eine sachgemäße Er-

weiterung des verallgemeinerten Stieltjes-Hahn-Wienerschen Integrals definiert ist. — Für  $\alpha = 2$  stammt der Satz von H. Hahn [Wiener Ber. 134, 150 (1925)]. *Bochner*.

**Mayrhofer, K.: Über reelle Partialbruchreihen. I u. II.** Mh. Math. Phys. 42, 191 bis 206 u. 207—209 (1935).

L'auteur utilise un théorème de M. Hadamard sur les séries  $\sum u_\nu v_\nu$  pour étudier les séries réelles de la forme:  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{a_\nu - x}$ ; il montre que trois cas seulement sont

possibles: 1° La série diverge pour toute valeur de  $x$ . 2° La série converge pour une valeur de  $x$  et diverge en tous les autres points. 3° La série converge en tout point  $x \neq a_\nu$ . Dans ce dernier cas la convergence est uniforme dans tout intervalle ne contenant pas de point  $a_\nu$ . L'a. démontre même (2<sup>ème</sup> note) que la série représente une



fonction méromorphe ayant les points  $a_n$  pour pôles. Une série numérique dépendant des  $a_n$  (série adjointe) joue un rôle essentiel dans la séparation des différents cas.

*E. Blanc* (Paris).

**Kuttner, B.: A theorem on trigonometric series.** J. London Math. Soc. **10**, 131 (1935).

Es wird bewiesen: Wenn eine trigonometrische Reihe in einer Menge  $H$  von positivem Maße konvergiert, so konvergiert die konjugierte trigonometrische Reihe in fast allen denjenigen Punkten von  $H$ , wo sie  $C_1$ -summierbar ist. — Da eine Fourierreihe und ihre konjugierte Reihe fast überall  $C_1$ -summierbar sind, ergibt sich unmittelbar der wichtige Spezialfall: Die Konvergenzmenge einer Fourierreihe und ihrer konjugierten Reihe unterscheiden sich nur um eine Menge vom Maße 0. *Rogosinski*.

**Braïtzeff, Ivan: Sur les singularités de types spéciaux d'une fonction donnée par son développement en série de Dirichlet.** C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1565—1567 (1935).

L'auteur applique les résultats d'une Note précédente (ce Zbl. **10**, 163) pour obtenir des conditions nécessaires et suffisantes afin qu'un point singulier  $\xi$  d'une fonction  $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$  soit de nature donnée (p. ex. un pôle, ou un point algébroparithmique). *Vlad. Bernstein* (Milano).

**Braïtzeff, Jean: Sur la formule fondamentale de la théorie de la série de Dirichlet.** C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1718—1720 (1935).

La „formule fondamentale de la théorie de la série de Dirichlet“ dont parle le titre consiste en ce que, étant donnée une série de Dirichlet (1)  $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ ,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  pour  $n \rightarrow \infty$  possédant un domaine de convergence, on a

$$F_{\alpha, \varphi}(z) = e^{i\varphi} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{\theta[e^{i\varphi}(2k\pi i - \log z) - \alpha]}{(2k\pi i - \log z)^2}, \quad (2)$$

$$\theta(z) = f(-\log z); \quad F_{\alpha, \varphi}(z) = e^{i\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} z^n n \vartheta_{\alpha}(n^{\alpha} e^{i\varphi}); \quad \vartheta_{\alpha}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n u^{\lambda_n}}{\Gamma(\alpha \lambda_n + 2)}.$$

La démonstration de la formule (2) donnée par l'auteur, et celle de l'inégalité (3)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n \vartheta_{\alpha}(n^{\alpha} e^{i\varphi})|} \leq e$  dont il se sert dans la démonstration de (2), sont basées

sur une application répétée de la transformation d'Abel. Elles ne sont valables que si l'abscisse de convergence de (1) est négative. L'inégalité (3) peut d'ailleurs être elle-même en défaut lorsque l'abscisse d'holomorphie  $h$  de (1) est positive.

En effet, si l'on note que  $\theta_{\alpha}(z) = \frac{1}{z} \theta(z^{-\alpha})$  est la transformée de Laplace de la dérivée

de  $u \vartheta_{\alpha}(u^{\alpha})$ , on en déduit facilement que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \{\log |\vartheta_{\alpha}(r^{\alpha} e^{i\varphi})|/r\} \leq e^{h/\alpha}$ , et que l'on

peut pas remplacer  $h$  par un nombre plus petit dans le second membre de cette inégalité, sans que celle-ci cesse d'être valable quel que soit  $\varphi$  (cf. p. ex. V. Bernstein, Séries de Dirichlet, Paris 1933, 184—189 et 297—299). *V. Bernstein* (Milano).

**Suryanarayana Murty, T.: Note on Dirichlet's  $L$ -functions.** Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **1**, 707—708 (1935).

Verf. betrachtet  $L$ -Funktionen  $L(s) = L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$ , die reellen Nicht-hauptcharakteren mod  $k$  entsprechen, und definiert

$$S_1(x) = \sum_{n \leq x} \chi(n), \quad S_m(x) = \sum_{n \leq x} S_{m-1}(n) \quad (m \geq 1).$$

In einer kürzlich erschienenen gleichnamigen Note (vgl. dies. Zbl. **11**, 67) zeigte S. Chowla, daß  $L(s) > 0$  für  $s > 0$ , falls ein  $m(\chi)$  mit  $S_m(x) \geq 0$  für  $x \geq 1$  vorhanden ist. — In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. dieses Kriterium nebst Beweis wieder und teilt mit, daß er  $m$  für die zu  $k = 149, 151, 167, 179, 181$  und  $193$  gehörigen eigentlichen Charaktere berechnet habe. Es ergab sich:  $m = 1$  für  $k = 151, 167$ ;  $m = 2$  für  $k = 179, 181, 193$ ;  $m = 3$  für  $k = 149$ . *A. Walfisz* (Radoś, Polen).



### Differentialgleichungen:

Taylor, D. G.: A relation between two ordinary linear differential equations of the second order. Math. Notes Nr 29, IX—XI (1935).

Gegeben die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x)y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \Phi'(\xi)\eta = 0,$$

wobei  $f$  und  $\Phi$  inverse Funktionen voneinander sind. Dann läßt sich ein Zusammenhang zwischen den Lösungen  $y(x)$  und  $\eta(\xi)$  so gewinnen: Differenziert man die erste Gleichung nach  $x$  und setzt  $\frac{dy}{dx} = y_1$ , so erhält man  $\frac{d^2 y_1}{dx^2} - \frac{f''}{f'} \frac{dy_1}{dx} + f'y_1 = 0$ . Führt man in der zweiten Gleichung als neue Veränderliche  $\xi$  ein,  $\xi = \xi(\zeta)$ , so wird  $\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - \frac{\xi''}{\xi'} \frac{d\eta}{d\xi} + \xi'^2 \Phi'(\xi)\eta = 0$ . Beide Gleichungen stimmen formal überein, wenn man  $\xi$  mit  $\zeta$  identifiziert und  $\xi'\Phi'(\xi) = 1$  ist; diese letzte Beziehung besagt  $d\zeta = \Phi'(\xi)d\xi$ ,  $\zeta = \Phi(\xi) = \Phi(f(\zeta))$ , d. h.  $f$  und  $\Phi$  sind zueinander invers. Jede Lösung  $y_2 = y_1(\zeta)$  führt also zu einer Lösung  $\eta = y_1\{\Phi(\xi)\}$ , und entsprechend gilt auch das Umgekehrte.

Rellich (Marburg, Lahn).

Denffer, Herbert von: Über die Bernsteinsche Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 2, 237—270 (1935).

Bekanntlich hat S. Bernstein den folgenden Satz bewiesen: Eine elliptische Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t; \alpha) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \leq 0$$

— wobei  $F$  in allen Argumenten analytisch ist —, welche für  $\alpha_0$  eine Lösung besitzt, besitzt auch Lösungen mit (denselben Randwerten) für benachbarte  $\alpha$ . Bernstein führt die sog. trigonometrischen Moduln und die „norme inférieure“ ein. Nach einer nicht vollkommen berechtigten Kritik der Bernsteinschen Untersuchungen setzt sich der Verf. zum Ziel, die norme inférieure zu vermeiden und nur mit „erweiterten“ trigonometrischen Moduln auszukommen. Doch muß bemerkt werden, daß heutzutage auf ganz anderen Ideen fußende umfassendere Methoden vorhanden sind, mit denen man zu weiterreichenden Resultaten kommt. Es mögen nur folgende Untersuchungen erwähnt werden: 1. G. Giraud, Ann. École norm. (3) 47, 197—266, insbes. 243 ff. 2. L. Lichtenstein, Vorl. über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen usw., insbes. S. 88—101. Berlin: Julius Springer 1931; 3. J. Schauder, Math. Ann. 106, dies. Zbl. 4, 350 usw. Endlich erlauben uns die Arbeiten der zwei letzten Jahre insbesondere die sich auf lineare Differentialgleichungen beziehenden, einerseits bei nichtlinearen Differentialgleichungen die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zu reduzieren, andererseits auch weitere sogar nichteindeutige Probleme zu behandeln, die nicht den sukzessiven Approximationen zugänglich sind.

Schauder (Lwów).

Ignatovskij, V. S.: Zur Laplace-Transformation. C. R. Acad. Sci. URSS 2, 5—9 u. dtsch. Zusammenfassung 9—11 (1935) [Russisch].

L'auteur considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + mu = \varphi(x, t), \quad (1)$$

où  $c, c_1, a_1, m$  sont des constantes ( $c > 0$ ) et  $\varphi(x, t)$  une fonction donnée, et il donne (sans démonstrations) les solutions qu'il a obtenues par la méthode de F. Bernstein-Doetsch (transformation de l'équation donnée en équation ordinaire à l'aide de la transformation de Laplace, et transformation inverse de l'intégrale de cette nouvelle équation). Il considère le cas d'un segment infini d'un côté ( $0 \leq x < +\infty$ ), la fonction  $u(x, t)$  devant être déterminée sur ce segment pour tout  $t > 0$ ; il indique que des quatre fonctions  $u(0, t)$ ,  $u'_x(0, t)$ ,  $u(x, 0)$ ,  $u'_t(x, 0)$  trois peuvent être données arbitrairement, et la quatrième est alors parfaitement déterminée. Les solutions sont données sous forme explicite, par des intégrales qui occupent (suivant le cas) de 3 à 7 lignes. —



f. le Mémoire récent de F. Sbrana qui a résolu l'équation (1) dans le cas  $a_1 = 0$ ,  $(x, t) \equiv 0$ , mais pour un segment fini ou infini ( $0 \leq x \leq l \leq +\infty$ ), les conditions aux limites portant, dans le cas du segment fini, sur les deux bords du segment (ce Zbl. 0, 400).

Vlad. Bernstein (Milano).

**Siddiqi, M. Raziuddin: Cauchy's problem in a non-linear partial differential equation of hyperbolic type.** Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 195—202 (1935).

Existenz und Eindeutigkeit werden bewiesen für das Problem  $\frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u^2$  mit den Randbedingungen  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = f_1(x)$ ,  $u_t(x, 0) = f_2(x)$ . Zum Beweis wird die Entwickelbarkeit nach den Eigenfunktionen von  $\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + \lambda y = 0$  herangezogen.

Rellich (Marburg, Lahn).

**Vasilescu, Florin: Sur une mise au point concernant diverses méthodes de résolution du problème de Dirichlet.** C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1721—1723 (1935).

Die verschiedenen Verfahren zur Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie bestehen in der Regel aus zwei Schritten: zunächst wird bei vorgegebenen Randwerten in eindeutiger Weise eine harmonische Funktion  $V$  konstruiert, dann werden die Bedingungen untersucht, unter welchen  $V$  die vorgeschriebenen Randwerte annimmt. In Fällen, wo die Randwertaufgabe unlösbar wird, könnten die verschiedenen Verfahren a priori zu verschiedenen Funktionen  $V$  führen (so daß z. B. die Kriterien für die Regularität eines Randpunktes bei verschiedenen Verfahren a priori nicht vergleichbar sind). Zweck der vorliegenden Note ist neben der Klarlegung dieses Tatbestandes die Feststellung, daß anscheinend alle bisher gegebenen Konstruktionen auch im allgemeinsten Falle zur selben Funktion  $V$  führen, nämlich zur Lösung der sog. verallgemeinerten Randwertaufgabe im Wienschen Sinne.

Es sind das (C. R. = C. R. Acad. Sci., Paris): die méthode du balayage, sowie deren Verallgemeinerung durch de La Vallée Poussin [Ann. Inst. H. Poincaré **2** (1932); dies. Zbl. **4**, 14—115]; die Beweise hierfür bei Vasilescu [C. R. **193** (1931) und C. R. **200** (1935)]; dies. Zbl. **2**, 392 bzw. **10**, 356]. Ferner die Verfahren von Zarembka [Bull. Acad. Sci. Cracovie **28** (1909)], Raynor [Ann. of Math. **23** (1923)], Phillips und Wiener [J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **4** (1923)] und schließlich zwei Konstruktionen von Lebesgue [C. R. **155** (1912) und **154** (1912)]; Beweis für letzteres bei Perkins [C. R. **184** (1927)]. W. Feller.

**Hornich, Hans: Über die Bedingungen der Lösbarkeit der verallgemeinerten zweiten Randwertaufgabe.** Mh. Math. Phys. **42**, 159—162 (1935).

Auf der dreimal nach der Bogenlänge  $s$  stetig diff.baren Kurve  $C$  von der Länge  $L$  ist eine zweimal stetig diff.bare Funktion  $\alpha(s)$  mit  $\alpha(s + L) = \alpha(s) + 2\pi\mu$  gegeben ( $\mu$  ganz und  $< 1$ ). Es wird nach einer in dem von  $C$  eingeschl. Gebiet regulären Potentialfunktion  $u$  gefragt, die am Rande der Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial s} \sin \alpha(s) + \frac{\partial u}{\partial n} \cos \alpha(s) = g(s)$$

genügt.  $g(s)$  ist stetig diff.bar und hat die Periode  $L$ . — Der Verf. hat schon früher eine notw. und hinr. Bedingung für die Existenz einer solchen Funktion aufgestellt (Mh. Math. Phys. **41**, 445; dies. Zbl. **10**, 260). Dieser Bedingung wird hier eine explizitere Form gegeben. Es wird gezeigt, daß sie dann und nur dann erfüllt ist, wenn die  $-2\mu + 1$  ersten Fourierkoeffizienten einer leicht zu bestimmenden Funktion verschwinden.

L. Ahlfors (Helsingfors).

**Hornich, Hans: Eine Randwertaufgabe der räumlichen Potentialtheorie.** Mh. Math. Phys. **42**, 153—158 (1935).

Verf. behandelt die Aufgabe, eine im Innern und auf der Oberfläche der Einheitskugel stetig differenzierbare Potentialfunktion  $V(r, \vartheta, \varphi)$  zu finden, für welche  $aV_r + bV_\varphi$  auf der Oberfläche gleich einer gegebenen Funktion  $f(\vartheta, \varphi)$  ist, wobei  $a$  und  $b$  gegebene Konstanten sind. Es werden zunächst die Spezialfälle  $a = 0$ ,  $b = 1$  und  $b = 0$ ,  $a = 1$  und sodann der allgemeine Fall  $a = 1$ ,  $b \neq 0$  behandelt. In allen Fällen spielt für die Diskussion der Lösbarkeit und die Konstruktion der Lösung die



Potentialfunktion  $W = arV_r + bV_\varphi$ , die auf der Oberfläche gleich  $f$  ist, eine grundlegende Rolle. E. Rothe (Breslau).

**Pfriem, H.:** Beitrag zur Theorie der Wärmeleitung bei periodisch veränderlichen (quasistationären) Temperaturfeldern. Ing.-Arch. 6, 97—127 (1935).

A method of obtaining solutions of the differential equation of heat conduction for periodically varying states of temperature is illustrated by the solution of problems for regions having plane, spherical or cylindrical boundaries. Great simplification is attained by the use of complex functions. It is shown, by analogy with the known phenomena of wave propagation, that it is possible to ascribe to a definite heat or temperature wave the properties of interference, reflection and refraction. Solutions are given for: (1) the propagation of a fundamental wave in a semi-infinite region bounded by the plane  $x = 0$  with an application to the problem of the heat transfer between a gas and a solid, assuming an ideal Prandtl boundary layer; (2) the interference of fundamental waves in the case of an infinite plate of finite thickness; (3) the reflection of fundamental waves at the plane boundary separating two materials; (4) propagation of heat waves in a body composed of layers of different materials; (5) refraction of fundamental waves at the plane boundary separating two different materials; (6) propagation of temperature waves in an infinite region exterior to a spherical surface on which the temperature varies periodically; (7) interference and reflection of spherical fundamental waves; (8) similar problems for regions bounded by cylinders with an application to the direct measurement of the periodically varying temperature of a gas surrounding a cylinder, assuming an ideal Prandtl boundary layer at the surface of the cylinder.

H. W. March (Madison, Wisc.).

**Andronow, A., et A. Witt:** Sur la théorie mathématique des systèmes auto-oscillatoires à deux degrés de liberté. Techn. Physics USSR 1, 249—271 (1934).

Dans la première partie il s'agit de la recherche des solutions périodiques (pour de petites valeurs du paramètre  $\mu$ ) d'un système de deux équations différentielles, qui est mis sous la forme:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi &= \mu f(\xi, \dot{\xi}, \eta, \dot{\eta}; \mu), \\ \ddot{\eta} + \omega_2^2 \eta &= \mu g(\xi, \dot{\xi}, \eta, \dot{\eta}; \mu);\end{aligned}$$

$f$  et  $g$  sont supposées analytiques par rapport à tous les arguments. Suivant Poincaré (Les Méthodes nouvelles, t. I) les aut. représentent la solution cherchée, se réduisant à  $\xi = R \cos \omega_1 t$ ,  $\eta = 0$  pour  $\mu = 0$ , comme une série de puissances de  $\mu$  et des valeurs initiales; des conditions de périodicité on détermine les valeurs initiales, la période et l'amplitude du mouvement cherché; en particulier l'amplitude limite  $R$  (pour  $\mu = 0$ ) est déterminée par l'équation:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} f(R \cos \omega_1 q, -\omega_1 R \sin \omega_1 q, 0, 0; 0) \sin \omega_1 q dq = 0.$$

Une condition suffisante pour l'existence de ces solutions est:  $\omega_2 \neq n\omega_1$  ( $n$  est un nombre naturel). Les conditions de stabilité dans le sens de Liapounoff des solutions trouvées sont données. La seconde partie contient des applications physiques.

W. Stepanoff (Moscou).

### Variationsrechnung:

**Géhéniau, Jules:** Généralisation de la formule d'excès de Weierstrass, déduite du théorème d'indépendance de Hilbert-De Donder. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 385 bis 389 (1935).

**Mammana, Gabriele:** Criterio di sufficienza per un estremo nei problemi di calcolo delle variazioni. Rend. Circ. mat. Palermo 58, 370—439 (1934).

In a previous paper [Boll. Un. Mat. Ital. 13, 174 (1934); this Zbl. 10, 213] the author indicated the results which are obtained in this memoir. The greater part of the present

per is devoted to a detailed study of the minimum of the integral  $\int y^{1/n} \sqrt{1 + y'^2} dx$ , which the cases  $n = 1, 2$  have been treated in the literature. An earlier paper by the author [Annali di Mat. (4) **10**, 1 (1931); this Zbl. **3**, 348] deals with the general case; much of this material, as far as it refers to the case  $n \geq 1$  is here presented again in somewhat different form. The principal result (see p. 432) may be stated as follows: through two points  $P_1$  and  $P_2$  there pass 0, 1 or 2 extremals of class  $C'$ . In case there is but one, this unique extremal furnishes an absolute minimum in the sets of curves of class  $C'$  which pass through  $P_1$  and  $P_2$ , and which lie in the region covered by the set of extremals through  $P_1(P_2)$ ; otherwise the absolute minimum in these sets of curves is realized by that one of the two extremals which has the greater slope at  $P_1$ . In a brief final section the author derives from this result an existence theorem for the general problem  $\int f(x, y, y') dx = \min$ . The hypotheses of this theorem carry over the essential conditions which insured the existence of the absolute minimum in the special problem. These conditions do not seem to lend themselves very readily to applications in other special problems; moreover it still has to be proved that the conditions as formulated are indeed sufficient for the general problem. The reasoning which leads to the theorem on p. 397 appears to be defective, although the conclusion is probably valid.

Arnold Dresden (Cambridge).

**Lefschetz, S.: Application of chain-deformations to critical points and extremals.** Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **21**, 220—222 (1935).

An outline is given of an extension of Morse's theory of critical points to the case of a metric space over which a function is defined, with certain regularity conditions on the space and on loci determined from the functions. The type numbers of the critical points are defined in terms of the homology groups of a given class of chains on the space. A method is outlined of applying the results to the theory of extremals in the calculus of variations, and the author states that this method will greatly simplify the treatment of Chapters VII and VIII of Morse's Colloquium Publication. The validity of the statement, eight lines from the end, that " $q$  may be replaced by any  $q' < q$ " is not clear to the reviewer.

A. B. Brown (New York).

**Brown, Arthur B.: Isolated critical points.** Amer. J. Math. **57**, 389—390 (1935).

This note replaces an incomplete proof of an earlier paper [Amer. J. Math. **52**, Lemma 14 on p. 266 (1930)] by the methods of that paper. The lemma is also a corollary of results of Marston Morse (see this Zbl. **1**, 331.)

A. B. Brown (New York).

## **Funktionentheorie:**

**Ahlfors, Lars: Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen.** Scand. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. **8**, Nr 10, 1—14 (1935).

La théorie des fonctions méromorphes de R. Nevanlinna repose sur l'introduction de valeurs moyennes  $N(r, \frac{p}{q})$  caractérisant les zéros de  $f(z) - a$  et sur leur comparaison

avec la fonction  $T(r)$  égale à la somme de  $N(r, \infty)$  et de la moyenne  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$ ;

les relations entre  $T(r)$  et  $N(r, a)$  y sont déduites de l'étude de  $m(r, f'/f)$  et d'une quantité analogue à celle employée par Borel dans ses travaux sur le th. de Picard. Plus récemment, dans la recherche des propriétés de l'ensemble des points  $a$  pour lesquels  $N(r, a)/T(r)$  tend vers 1, on fut conduit à utiliser une méthode directe d'intégration [Littlewood, J. London Math. Soc. **1929**; Ahlfors, Verh. d. 7. skand. Math. Kongress, Oslo **1929** (voir aussi Valiron, C. R. Acad. Sci., Paris **189**, 730, Note du 10.11.29)]. En généralisant ce procédé d'intégration par l'emploi d'une densité convenablement choisie, l'auteur donne un magnifique exposé de la théorie. Les nombres  $a$  sont représentés sur la sphère de Riemann de rayon 1, soit  $A$ ;  $n(r, a)$  est le nombre des points où  $f(z) = a$ ,  $|z| < r$ ;  $[f, a]$  est la distance des images de  $f$  et  $a$ ,  $q(a)$  la densité et



$w(a)$  l'élément d'aire de la sphère au point image de  $a$ . Si  $\int \int_A \varrho(a) dw(a) = 1$  et si l'on pose:  $z = re^{i\varphi}$ ,

$$m_\varrho(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(f) d\varphi, \quad p(f) = \int \int_A \log \frac{1}{|f, a|} \varrho(a) dw(a),$$

$$N_\varrho(r) = \int \int_A N(r, a) \varrho(a) dw(a), \quad rN'_\varrho(r) = n_\varrho(r) = \int \int_A n(r, a) \varrho(a) dw(a)$$

la somme  $T(r) = m_\varrho(r) + N_\varrho(r)$  est indépendante de  $\varrho(a)$ , elle joue le rôle de la fonction de Nevanlinna et est plus commode. On a

$$n_\varrho(r) = \int_0^r \lambda(t) t dt, \quad \lambda(r) = \int_0^{2\pi} \frac{|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2} \varrho(f) d\varphi,$$

donc  $T(r) > \int_{r_0}^r n_\varrho(t) \frac{dt}{t} - m_\varrho(r_0)$ . Le th. sur la comparaison des moyennes arith.

et géom. montre que

$$\mu'(r) = \frac{n_1(r, 0)}{r} - \frac{n_1(r, \infty)}{r} - 2 \frac{dm(r, \infty)}{dr} \quad \text{si} \quad \mu(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|f'|}{1 + |f|^2} d\varphi, \quad (1)$$

$n_1(r, a)$  étant relatif à la dérivée de  $f(z)$ . Ceci conduit à l'inégalité fondamentale nouvelle

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \varrho(f) d\varphi \leq 2[2T(r) - N_1(r)] + \log \frac{\lambda(r)}{2\pi} \quad (2)$$

où  $N'_1(r) r = n_1(r, 0) - n_1(r, \infty) + 2n(r, \infty)$ . Lorsque  $f(z)$  est méromorphe pour fini, on a  $\log \lambda(r) = O[\log r + \log T(r)]$  à l'ext. de certains intervalles, il faut ajouter un terme en  $-\log(R-r)$  pour les f. méromorphes pour  $r < R$ . En prenant

$$\log \varrho(u) = 2 \sum_1^q \log \frac{1}{[u, a_i]} - \alpha \log \left[ \sum_1^q \log \frac{1}{[u, a_i]} \right] - 2C, \quad \alpha > 0$$

où les  $a_i$  sont donnés et  $C$  une constante convenable et en tenant compte de (1), on déduit de (2) le second th. fondamental de Nevanlinna et ses conséquences sur la distribution des valeurs.

G. Valiron (Paris).

**Aronszajn, Natan:** Sur les singularités des surfaces de Riemann des fonctions inverses de fonctions entières. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1569—1571 (1935).

Voranzeige einer Dissertation, in welcher allgemeine Sätze über die Lage und Art der Singularitäten der Umkehrfunktion einer ganzen Funktion bewiesen werden sollen.

L. Ahlfors (Helsingfors).

**Vijayaraghavan, T.:** On derivatives of integral functions. J. London Math. Soc. **10**, 116—117 (1935).

$f(z)$  étant holomorphe pour  $|z| = r > R$  et ayant une singularité essentielle à l'infini,  $M(r)$  désignant le maximum de  $|f(z)|$  pour  $|z| = r$ ,  $M_1(r)$  celui de  $|f'(z)|$  de l'inégalité

$$M_1(r) \geq \frac{d}{dr} M(r)$$

et de la propriété de convexité due à Hadamard, qui entraîne, pour  $r$  assez grande  $\frac{d}{dr} M(r) \geq \frac{M(r)}{r} \frac{\log M(r)}{\log r}$  (les dérivées étant les dérivées à gauche), l'auteur déduit l'inégalité très précise dans le cas des croissances lentes

$$M_1(r) \geq \frac{M(r) \log M(r)}{r \log r}.$$

G. Valiron (Paris).

**Rosenblatt, Alfred, et Stanislaw Turcki:** Sur les coefficients des séries de puissances équivalentes dans le cercle unité. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1270—1272 (1935).

Nach einem Einfall von Grandjot [vgl. die Arbeit des Ref. in Math. Ann. **100**, 8 (1928)] werden die Koeffizienten der schlichten Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = z \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n+1} z^{n+1} \right)^{-2}, \quad a_1 = 1,$$

mittels der Bieberbachschen Ungleichung  $\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1$  abgeschätzt. Dieser sehr elementare Weg ergibt z. B.

$$|a_3| \leq 3\frac{1}{9}, \quad |a_4| < 4,503495, \quad |a_5| < 6,309536.$$

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

**Venkatachaliengar, K.:** A note on Julia's Lemma. Math. Student **2**, 149—150 (1934).

Une extension due à W. Julia du lemme de Schwarz est formulée par l'auteur comme il suit: Soit  $w = f(z)$  définie, analytique et de partie réelle non négative pour  $R(z) > 0$ . Soit une suite  $\{z_n\}$  de points de l'axe réel positif, cette suite tendant sans décroître vers l'infini. Si  $R(w_n) \geq R(z_n)$ , on aura  $R(w) \geq R(z)$  quel que soit  $z$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $f$  représente une translation parallèle à l'axe imaginaire.

E. Blanc (Paris).

**Marčenko, A.:** Sur la représentation conforme. C. R. Acad. Sci. URSS **1**, 287—288 (1935). Text 289—290 (1935) [Russisch].

Die Note enthält eine Verschärfung des folgenden Satzes von Bieberbach: Die Funktion  $w = f(z)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$ , bilde  $|z| < 1$  auf das Innere einer Jordankurve ab, die 1. in dem Kreisringe  $1 - \varepsilon \leq |w| \leq 1 + \varepsilon$  liegt und 2. eine Länge  $L$  hat, für welche  $|L - 2\pi| < 2\pi\varepsilon$  gilt. Dann hat man  $|f(z) - z| < 4\pi\sqrt{2\varepsilon}$ . Verf. setzt 2. durch 2': wenn  $\alpha, \beta$  zwei Punkte der Bildkurve von dem Abstände  $2\varepsilon$  sind, ist der Durchmesser des entsprechenden Bogens  $< \eta$ . Er beweist sodann

$$|f(z) - z| < K_1 \varepsilon |\log \varepsilon| + K_2 \eta,$$

wobei  $K_1$  und  $K_2$  absolute Konstanten sind. Im Bieberbachschen Falle erhält er so eine Schranke von der Größenordnung  $\varepsilon |\log \varepsilon|$ , was zu Bieberbachs Behauptung,  $\sqrt{\varepsilon}$  die richtige Größenordnung ist, in Widerspruch steht. Der Beweis wird kurz angedeutet.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

**Ford, Lester R.:** On properties of regions which persist in the subregions bounded by level curves of the Green's function. Duke math. J. **1**, 103—104 (1935).

$S$  sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet in einer  $w$ -Ebene mit mindestens zwei Randpunkten, das  $w = 0$  enthält. Man bilde  $|z| < 1$  so auf  $S$  ab, daß  $z = 0$  auf  $w = 0$  entspricht, und bezeichne das Bild von  $|z| < r < 1$  mit  $S_r$ .  $w_0 = T(w_1, w_2, \dots, w_n)$  ist analytisch in  $w_1, w_2, \dots, w_n$  in  $S$ , und es sei  $T(0, 0, \dots, 0) = 0$ . Dann wird behauptet: Liegt für  $w_1, w_2, \dots, w_n$  in  $S$  auch  $w_0 = T(w_1, w_2, \dots, w_n)$  in  $S$ , so hat auch  $S_r$  die Eigenschaft, daß mit  $w_1, w_2, \dots, w_n$  auch  $w_0$  zu  $S_r$  gehört. Der Beweis ist dem von T. Radó (Math. Ann. **102**, 428) gegebenen Beweis für den Studyschen Satz über die Konvexität der Niveaukurven bei konformer Abbildung konvexer Gebiete (d. h.  $T(w_1, w_2) = tw_1 + (1-t)w_2$ ,  $0 < t < 1$ ) nachgebildet.

S. Warschawski (Ithaca, N. Y.).

**Mandelbrojt, Szolem:** Sur un problème de M. Carleman concernant les fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1517—1520 (1935).

L'a. résout le problème abordé dans une préc. Note (ce Zbl. **11**, 120). Etant donnée une suite infinie de nombres positifs  $m_n$ , à quelles conditions (nécess. et suff.) doit-on les assujétir pour que toute fonction  $f(x)$  infiniment dérivable pour  $a \leq x \leq b$  et vérifiant les inégalités  $|f^{(n)}(x)| < m_n$  soit analytique? Une réponse est la suivante: si l'on pose

$$S(r) = \max r^n / m_n \quad \text{pour} \quad 0 \leq n \leq r, \quad (1)$$



il faut et il suffit qu'il existe une constante positive  $\alpha$  telle que  $S(r) > \alpha$  à partir d'une valeur de  $r$ . — On peut remplacer cette condition par une autre équivalente en introduisant une suite rectifiée  $m'_n$ ; les  $m'_n$  sont obtenus en remplaçant les  $m_n$  trop grands par d'autres plus petits suivant la méthode employée par Hadamard pour les séries de Taylor, modifiée pour tenir compte de la cond. imposée à  $n$  dans

La condition prend la forme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{m'_n}}{n} < \infty$  (analogue à celle pour qu'une fonction entière soit au moins du type moyen de l'ordre 1). La démonstration du th. principal repose surtout sur les travaux de D. Jackson sur la meilleure approximation et ceux de S. Bernstein (Leçons sur les propriétés extrémales. Paris 1926).

G. Valiron (Paris).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik :**

Lévy, Paul: Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînées. Bull. Sci. math., II. s. 59, 84—96 u. 109—128 (1935).

Une suite infinie de variable aléatoires (dont chacune a une valeur comprise entre 0 et 1) définit un point  $A$  dans un cube à une infinité de dimensions. On peut construire une correspondance biunivoque (sauf dans les cas dont la probabilité est nulle) entre les points du cube et entre les points d'un segment. La recherche de la probabilité se ramène ainsi à celle de la mesure des ensembles linéaires. — Soient  $u_1, u_2, \dots, u_n$  une suite de valeurs aléatoires dépendantes (enchaînées); la loi de distribution de  $u_n$  dépend des valeurs de  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ . Si  $\sigma_{n,N}$  est l'oscillation de la somme  $u_1 + u_2 + \dots + u_N$  quand  $r$  varie entre  $n$  et  $N$ , la probabilité de la convergence de la série  $\sum u_n$  est égale à

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} P(\sigma_{n,N} \leq \varepsilon).$$

Supposons que la valeur probable de  $u_n$ , évaluée lorsqu'on connaît  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ , soit égale à zéro et que l'on ait  $|u_n| \leq U$ ,  $U$  étant indépendant de  $n$  ainsi que des valeurs trouvées pour  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ .  $\mu_n^2$  étant la valeur probable de  $u_n^2$  lorsqu'on connaît  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ , les séries  $\sum u_n$  et  $\sum \mu_n^2$  sont de même nature (convergentes ou divergentes) sauf dans le cas dont la probabilité totale est nulle. — L'auteur donne des expressions asymptotiques de différentes quantités qui dépendent de la chaîne.

B. Hostinsky (Brno).

Lévy, P.: Sull'applicazione della geometria dello spazio di Hilbert allo studio delle successioni di variabili casuali. Giorn. Ist. Ital. Attuari 6, 13—28 (1935).

Verf. gibt ein Verfahren an, welches gestattet, alle Untersuchungen über Folgen zufälliger Größen auf Betrachtung von Folgen reeller Funktionen einer Veränderlichen zurückzuführen. Als Anwendung erhält Verf. neue Beweise einiger Sätze von E. Slutsky und V. Romanovsky über das sog. sinusoidale Grenzwertgesetz (loi sinusoidale limite) von E. Slutsky [vgl. V. Romanovsky, Sur la loi sinusoidale limite. Rend. Circ. mat. Palermo 56, 82—111 (1932); dies. Zbl. 4, 264].

A. Kolmogoroff.

Przyborowski, J., et H. Wileński: Sur les erreurs de la première et de la seconde catégorie dans la vérification des hypothèses concernant la loi de poisson. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1460—1462 (1935).

The paper is concerned with the theory of Neyman and E. S. Pearson in which they recognize errors of two categories: (I) Errors due to rejecting a true hypothesis; (II) Errors due to accepting a false hypothesis. Superior limits are found for the probabilities of errors of types (I) and (II) in the case in which the observed items are distributed in accord with the law of Poisson

$$p(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}.$$

It is shown that the superior limits of both the probabilities of errors of type (I) and of type (II) can be calculated by the use of tables of the incomplete gamma functions.

H. L. Rietz (Iowa).

**Rider, P. R.: The third and fourth moments of the generalized Lexis theory.** *Metron* 2, Nr 1, 185—200 (1934).

This paper gives a development of the formulas for the expected values of third and fourth moments of a set of  $n$  observations by extending the method used of Coode [Bull. Amer. Math. Soc. 27, 439—442 (1920—1921)], in deriving the expected value of the second moment, and then shows how the usual formulas for the third and fourth moments of Bernoulli, Lexis, and Poisson series emerge from these formulas as special cases. Then follows an application of the formulas for the expected values of the third and fourth moments in a generalized Lexis theory. *H. L. Rietz.*

**Knoll, Franz: Zur Bruns-Hermite'schen Reihe in der mathematischen Statistik.** *Österr. Akad. Wiss. Wien* 1935, 45—52 (H. 1/2).

Zusammenstellung einiger bekannter Formeln über die Hermite'schen Polynome  $H_n(x)$ , die bei der Berechnung der Entwicklung einer Verteilungsfunktion  $F(x)$  nach den  $H_n(x)$  nützlich sein können. Insbesondere wird darauf hingewiesen, daß für die Entwicklungskoeffizienten  $c_k$  die symbolische Darstellung  $\sqrt{\pi} k! 2^k c_k = H_k(\sigma)$  gilt, wobei  $H_k(\sigma)$  in bekannter Weise durch Ersetzen der Potenzen von  $x$  durch die entsprechenden Momente von  $F(x)$  entsteht. Die Formel ist übrigens nicht neu und findet sich u. a. bei Ch. Jordan, *Statistique mathématique*. Paris 1927, S. 34 (9). — Als Beispiel die Bernoullische Verteilung, wobei das erste Glied der Entwicklung natürlich mit der Gauß'schen Normalverteilung zusammenfällt. *Feller* (Stockholm).

**Lewis, W. T.: A reconsideration of Sheppard's corrections.** *Ann. math. Statist.* 6, 11—20 (1935).

Nach Kritik der Voraussetzungen für die Herleitung der Sheppardschen Korrekturen für die Momente einer gruppierten Verteilung wählt der Verf. einen anderen Ausgangspunkt (jede Gruppe wird gemäß einer Parabel zweiten Grades über ihr Intervall verteilt) und gewinnt dadurch andere Korrekturen. — Bei der Kritik scheint der Verf. zu übersehen, daß die Annahme von „hohem Kontakt“ für die Herleitung der Sheppardschen Korrekturen überflüssig ist [W. F. Sheppard, *Biometrika* 5 (1907); vgl. dies. Zbl. 9, 359, Wold]. Andererseits kann Verf.s numerisches Beispiel durch die Untersuchung irgendeiner der gruppierten Verteilung entsprechenden Verteilung vervollständigt werden. Setzt man z. B. eine Pearsonkurve an, so findet man für deren zweite und vierte Momente  $\mu_2 = 0,2004$ ,  $\mu_4 = 0,1070$  zum Vergleich mit des Verf. Ergebnissen: Die Momente der gruppierten Verteilung,  $\mu_2 = \mu_4 = 0,2857$ , geben nach Korrektur gemäß dem Verf.  $\mu_2 = 0,2214$ ,  $\mu_4 = 0,1870$  und gemäß Sheppard  $\mu_2 = 0,2024$ ,  $\mu_4 = 0,1720$ . *Herman Wold* (Stockholm).

**Byron, Frank H.: The point binomial and probability paper.** *Ann. math. Statist.* 6, 21—26 (1935).

On nomographical calculation of  $\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$ . — The auxiliary tables do not contain the quantities called  $x_1$  and  $x_2$ , but these divided by  $\sqrt{np(1-p)}$ . *H. Wold* (Stockholm).

**Zwinggi, Ernst: Deckungskapital und Storno.** *Assekuranz-Jb.* 54, 27—37 (1935).  
Geht man von der bekannten Differentialrelation für das Deckungskapital unter Berücksichtigung der Tatsache, daß beim vorzeitigen Ausscheiden nur ein Bruchteil des Deckungskapitals zur Auszahlung gelangt, aus und löst diese Beziehung nach der Prämie auf, so kann man die Prämie in die Spar-, die Risiko- und die Stornogewinnprämie spalten. Es lassen sich unter Benützung dieser Größen einerseits eine Reihe von Relationen zwischen ihnen sowie bemerkenswerte Integralgleichungen für das Deckungskapital angeben. Beachtenswert ist die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Prämie unter Einbezug des Stornos und der Prämie ohne dessen Berücksichtigung; ein numerisches Beispiel erläutert die Untersuchung. *F. Knoll* (Wien).



**Giaccardi, F.:** Sul valore capitale di una rendita certa a termini costanti e tasso variabile sinusoidalmente. *Giorn. Mat. Finanz.*, II. s. 5, 1—15 (1935).

Supposto il tasso istantaneo di capitalizzazione definito dalle espressioni  $q(z) = \alpha + \beta \sin \gamma z$  e  $q(z) = \beta \sin \frac{\pi}{s} z$ , si calcolano i valori attuali corrispondenti delle rendite certe, continue, temporanee, a termini costanti, e si costruisce un piano di ammortamento a termini costanti e tasso variabile sinusoidalmente, secondo la prima ipotesi.

*Autoreferat.*

**Del Vecchio, Ettore:** Sulla generalizzazione della formula di Achard e sul rischio matematico di un'obbligazione. *Giorn. Mat. Finanz.*, II. s. 5, 26—33 (1935).

Si stabilisce in modo assai semplice la formula che generalizza, in regimi qualsiasi di capitalizzazione, la relazione di Achard inerente ai prestiti per obbligazioni. Si determina inoltre, in regime di capitalizzazione composta, il rischio matematico di un'obbligazione, precisandone la rispettiva portata finanziaria. *Autoreferat.*

**De Finetti, Bruno:** Sul comportamento assintotico della mortalità. *Rend. Circ. mat. Palermo* 58, 359—366 (1934).

Ist  $l(x)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neugeborener mehr als  $x$  Jahre leben wird, setzt man  $\mu(x) = -d \lg l(x)/dx$  und nimmt an, daß die positive Funktion  $\mu(x)$  ständig zunimmt, so bestehen a priori folgende drei Möglichkeiten: a) es gibt ein  $\omega > 0$  mit  $l(\omega) = 0$ ,  $l(\omega - \varepsilon) > 0$  für alle  $\varepsilon > 0$ ; b)  $l(x) > 0$  für alle  $x$ ,  $\mu(x) \rightarrow \infty$  bei  $x \rightarrow \infty$ ; c)  $l(x) > 0$  für alle  $x$ ,  $\mu(x) \rightarrow \bar{\mu} < \infty$  bei  $x \rightarrow \infty$ . Verf. zeigt, daß das in den Kreisen der praktischen Statistiker verbreitete und mehrmals ausgesprochene Mißtrauen gegen c) auf Verwechslungen und Mißverständnissen gegründet ist; vielmehr ist in Wirklichkeit c) die einzige sinngemäße Annahme, während gegen a) und b) ernste Einwände erhoben werden können. Zum Schluß wird der Begriff des „Grenzalters“ in Verbindung mit den drei Annahmen a), b), c) diskutiert.

*A. Khintchine (Moskau).*

**De Franchis, Michele:** A proposito della precedente nota del prof. Bruno De Finetti e in risposta ad un libello del sig. Insolera. *Rend. Circ. mat. Palermo* 58, 367—369 (1934).

**Vasmoen, Per:** Über den Einfluß einer Änderung der Sterblichkeit auf die Prämienreserve und andere damit verwandten Fragen. *Skand. Aktuarie Tidskr.* 18, 1—34 (1935).

Diese Fragen sind schon sehr häufig in der Literatur behandelt worden, doch fehlte bis heute noch eine vollständige Klarlegung der Zusammenhänge, zumal eine Reihe von den bis jetzt aufgestellten Sätzen sich einander widersprechen und zum Teil falsch sind. Verf. macht seine Untersuchungen für die gemischte Versicherung; und die lebenslängliche Todesfallversicherung unter Zugrundelegung der kontinuierlichen Rechnungsweise. Er geht dabei von folgender Reserveformel aus

$$\bar{V}_x = 1 - e^{-\int_0^t [P_{x+\theta, n-\theta} - \mu(x+\theta)] d\theta},$$

wobei  $P_{x+\theta, n-\theta}$  die Nettoprämie ist. Er stellt 4 Sätze auf, die die Zusammenhänge zwischen Reserve und Sterblichkeit klarlegen. Er widerlegt auch den Beweis von Dumas, daß es keine zwei Sterbetafeln geben soll, die überall zu denselben Reserven führen. Gleichzeitig berichtigt er die von Insolera aufgestellten Kriterien (vgl. dies. Zbl. 3, 21) und zeigt, wie die Insoleraschen Kriterien auch zum Teil in Widerspruch stehen zu bekannten Ergebnissen von englischen Aktuaren. *Löer (Göttingen).*

**Dubourdieu, J.:** Sull'applicazione del calcolo delle probabilità alla teoria dell'assicurazione malattia. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 6, 29—46 (1935).

Die von H. Galbrun entwickelten Methoden der Invaliditäts- und Krankheitsversicherung (vgl. dies. Zbl. 6, 359; 7, 254; 9, 267) werden durch Hinzufügung der Annahme ausgebaut, daß ein Invalidierter wieder aktiv werden kann. Aus den so modifizierten Galbrun'schen Ansätzen werden die Ergebnisse von E. Schönbaum wiedergewonnen. Auf diese naheliegende Erweiterung der Theorie von H. Galbrun hat Ref. bereits in Zbl. 6, 359 hingewiesen.

*Birnbaum (Lwów).*

**Dublin, Louis I., Alfred J. Lotka and Mortimer Spiegelman: The construction life tables by correlation.** *Metron* 12, Nr 2, 121—131 (1935).

**Riebesell, Paul: Gibt es eine Sachversicherungsmathematik?** *Arch. math. Wirtsch.-Sozialforsch* 1, 17—23 (1935).

## Numerische und graphische Methoden.

**Samssonow, K. W.: Über ein Gerät zur Lösung eines Systems von linearen Gleichungen.** *Appl. Math. a. Mech.* 2, 309—313 u. dtsch. Zusammenfassung 313 (1935) [Russisch].

Systeme von linearen Gleichungen lassen sich bekanntlich unter gewissen Bedingungen [vgl. z. B. Mises-Pollaczek-Geiringer, *Z. angew. Math. Mech.* 9 (1929)] durch Iteration lösen. Verf. schlägt für die Durchführung dieser Iteration einen Apparat vor, der auf dem Ohmschen Gesetz beruht. Mit Hilfe von Schiebewiderständen werden Spannungen hergestellt, die den Koeffizienten des Systems proportional sind. Diese Spannungen werden weiteren Schiebewiderständen zugeführt, deren Einstellung den unbekannten bzw. den dafür gewählten Näherungswerten entspricht und an denen die Produkte Koeffizient mal Unbekannte als Teilspannungen abgegriffen werden. Die Teilspannungen, die den Gliedern einer Gleichung entsprechen, können hintereinandergeschaltet werden. Ob die Gleichung erfüllt ist, wird mit einem Nullinstrument geprüft, gegebenenfalls wird einer der Näherungswerte abgeändert. Die Schaltskizze scheint nicht ganz einwandfrei zu sein. Ein vom Verf. gebauter Apparat für Systeme von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten arbeitete mit einer Genauigkeit von 5—6%.

*Theodor Zech (Darmstadt).*

**San Juan, Ricardo: Compléments à la méthode de Gräffe pour la résolution des équations algébriques.** *Bull. Sci. math.*, II. s. 59, 104—109 (1935).

Employant la méthode de Graeffe en profitant du théorème démontré par Rey Pastor (*Lecciones de Algebra*, p. 101, 2<sup>e</sup> édition 1932), sur la division des racines cherchées en deux groupes, on a besoin d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation  $A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + \dots + A_n = 0$  ait  $m$  racines de modules plus grands que les autres. Cette condition San Juan énonce notamment dans la forme  $0^s |A_{m+r}|^s \cdot |A_{m-s}|^r < |A_m|^{r+s}$  ( $r \leq n - m$ ,  $s \leq m$ ). Il fait aussi des considérations sur l'existence de racines équimodulaires et de l'exactitude de la méthode.

*Nyström (Helsingfors).*

**Dod, Will C.: An apparatus for projecting harmonic curves in space.** *J. Acoust. Soc. Amer.* 6, 279—281 (1935).

Man erhält Bilder von harmonischen Raumkurven dadurch, daß man auf einen in Raum in harmonischer Bewegung befindlichen weißen Stab einen Lichtstreifen projiziert, der ebenfalls eine harmonische Bewegung ausführt. Durch geeignete Wahl der Bewegungen lassen sich die verschiedensten Kurven zeigen, auch in der Ebene (Lissajousche Figuren). Die verschiedenen Antriebe erfolgen durch kleine Elektromotoren, es wird besonders gezeigt, wie mit der Einrichtung Begriffe wie Phasenverschiebung usw. erläutert werden können.

*G. Koehler (Darmstadt).*

**Wedemeyer, A.: Die Additions- und Subtraktions-Logarithmen und ihr Zusammenhang mit den Hyperbelfunktionen.** *Z. Vermessgswes.* 64, 329—332 (1935).

**Lorenz, Fritz: Vorrichtung zur mechanischen Bestimmung von Flächenmomenten beliebiger Ordnung.** *Z. Instrumentenkde* 55, 213—217 (1935).

Verf. propagiert das von ihm früher beschriebene Momentenplanimeter [Hauptver. Deutsch. Ing. Tschechoslowak. Republ., Mitt. 23, 97—99 (1934); vgl. auch *Zbl. Mech.* 2, 109]. Die Arbeit gibt die Verwendungsmöglichkeiten an, bringt eine kurze Beschreibung der Vorrichtung und einige Winke für ihre praktische Handhabung, wobei als Beispiel speziell auf die Ermittlung von Schwerpunkten eingegangen wird. Nach vorläufigen Versuchen soll die Genauigkeit befriedigend sein.

*S. Gradstein.*



**Nyström, E. J.:** Praktische Auswertung von elliptischen Integralen dritter Gattung. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. 8, Nr 12, 1—17 (1935).

Für das elliptische Integral dritter Gattung

$$II(k, \lambda, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{\cos^2 \psi + k'^2 \sin^2 \psi}}{\cos^2 \psi + \lambda'^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

(Normalform nach Hamel,  $\lambda'^2 = \lambda^2 + 1$ ,  $k'^2 = 1 - k^2$ ) gibt es keine Tafeln. Verschiebt  $II(k, \lambda, \varphi)$  als Stieltjesintegral

$$\frac{1}{\lambda'} \int_0^{\varphi} y(k, \varphi) dx(\lambda, \varphi)$$

mit geeigneten Funktionen  $x(\lambda, \varphi)$ ,  $y(k, \varphi)$  und gibt für diese Funktionen Netztafel und Tabellen. Bei veränderlichem  $\varphi$  beschreibt  $x, y$  eine Kurve  $\gamma$ , die man sich auszeichnet, um dann  $II$  durch Planimetrieren od. dgl. zu gewinnen. Die Genauigkeit läßt sich steigern, wenn man vom Integranden einen elementar integrierbaren Bestandteil abspaltet; man findet  $II$  so bis auf einige Einheiten der vierten Stelle. Für das vollständige elliptische Integral dritter Gattung  $II\left(k, \lambda, \frac{\pi}{2}\right)$  wird ein auf Näherungsformeln beruhendes Fluchtliniennomogramm angegeben. Theodor Zech.

**Meyer, H., und F. Tank:** Über ein verbessertes elektrisches Verfahren zur Auswertung der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  und seine Anwendung bei photoelastischen Untersuchungen. Helv. physica Acta 8, 315—317 (1935).

**Aitken, A. C.:** On least squares and linear combination of observations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 55, 42—48 (1935).

This paper treats the problem of the representation (smoothing or graduation) of a set of  $n$  observations which are functions of a single variable by linear combinations of  $k$  prescribed functions. The discussion is generalized to include data which may be non-equidistant, weighted, and correlated, and to include representations by any set of definite functions linearly independent over the  $n$  values of  $x$ . A special feature is the use of matrix and vector notation by which results are obtained in a very concise manner and are expressed very compactly. The representations obtained are exhibited as linear transformations on the data subject to the appropriate restrictions. The problem is first attacked by the least squares principle, the classical results for uncorrelated observations being obtained. Then the matter is taken up from the standpoint of linear combinations subject to conditions and the results are shown to agree with those found by least squares. C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

## Geometrie.

**Thébault, V.:** Sur le théorème de Feuerbach. Gaz. mat. 40, 435—437 (1935).

**Ducci, Enrico:** Somma delle potenze dello stesso grado  $k$  dei lati degli  $n$ -goni regolari, convessi e stellati, inseriti nel circolo di raggio uno, quando  $n$  è primo e  $k$  un intero positivo qualsiasi. Esercit. Mat., II. s. 8, 42—49 (1935).

**Ciani, Edgardo:** Quadrangoli e quadrilateri collegati alle cubiche ellittiche piane. Esercit. Mat., II. s. 8, 115—124 (1935).

**Turnbull, H. W.:** Quadrics associated with a Möbius hexad. Math. Notes Nr 29, I—VI (1935).

0, 1, 2, 3 und 0', 1', 2', 3' seien die Eckpunkte zweier Möbiusscher Tetraeder. Dann liegen 1. die Punkte 1, 1' und das Vierseit 2, 3', 2', 3 auf einer Fläche zweiter Ordnung  $Q_1$ . 2.  $Q_1$  enthält das Vierseit 0, 1', 0', 1 (entsprechend  $Q_2, Q_3$ ). 3. Die Geraden  $ik'$  ( $i \neq k$ ;  $i, k = 1, 2, 3$ ) gehören einem linearen Komplex an, dessen Null-

system mit den Polaritäten von  $Q_i$  vertauschbar ist. (Vgl. E. A. Weiss, dies. Zbl. 1, 290 (1931).]

E. A. Weiss (Bonn).

**Glagoleff, Nil:** Sur une conception des axiomes du premier groupe de la géométrie projective. Period. Mat., IV. s. 15, 172—176 (1935).

Die Verknüpfungaxiome I der projektiven Geometrie — 1. zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade, der sie angehören, 2. zwei Ebenen bestimmen genau eine Gerade, die ihnen angehört, 3. ein Punkt und eine Gerade außerhalb bestimmen genau eine Ebene, der sie angehören, 4. eine Ebene und eine Gerade außerhalb bestimmen genau einen Punkt, der ihnen angehört, 5. drei Punkte, die keiner Geraden angehören, bestimmen genau eine Ebene, der sie angehören, 6. drei Ebenen, denen nicht dieselbe Gerade angehört, bestimmen genau einen Punkt, der ihnen angehört — haben die üblichen räumlichen Verknüpfungssätze nicht zur Folge, wenn man den Begriff des „Angehörens von Raumelementen“ nicht durch die Forderungen präzisiert: a) symmetrisch zu sein und b) transitiv — ist ein Punkt und eine Gerade in vereinigter Lage und diese Gerade und eine Ebene, so auch der Punkt und die Ebene —, wie durch Konstruktion einer einfachen Modellgeometrie bewiesen wird, in der I 1. bis 6. gelten, aber z. B. nicht der Satz, daß eine Gerade einer Ebene angehört, wenn zwei ihrer Punkte der Ebene angehören. Verf. untersucht dann die logische Abhängigkeit der Axiome I, a), b) und c): Es gibt wenigstens vier Punkte, die gleichzeitig keiner Geraden und keiner Ebene angehören. Aus I 1. bis 4. und a), b), c) folgen alle projektiven Verknüpfungssätze.

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

**Toranzos, Fausto I.:** Über die Klassifizierung der Jordanschen Kurven in der projektiven Ebene. Bol. Semin. mat. Argent. 4, Nr 16, 21—23 (1934) u. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 10, 21—23 (1935) [Spanisch].

Die geschlossenen Jordankurven der projektiven Ebene werden eingeteilt in solche, die eine Gerade, eine gerade bzw. ungerade Zahl von Malen schneiden. Die hierbei im Falle unendlich vieler Schnittpunkte auftretenden Schwierigkeiten umgeht man, wenn man die (stets endlichen) Zahlen verwendet, welche angeben, wie oft die Jordankurve gewisse (4) Winkelräume durchsetzt, deren Spitzen nicht auf der Kurve liegen. (Wegen der Beweise wird auf eine andere, nicht angegebene Stelle verwiesen.) Busemann.

**Seifert, Ladislav:** Sur une surface du sixième degré. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 205, 1—19 (1935).

1. L'hyppopède et ses bisécantes. 2. Les bisécantes  $\delta = \text{const.}$  3. Les centres des bisécantes. Les paraboles sur la surface des centres. 4. Une classe de courbes remarquables sur la surface des centres. 5. Les bisécantes tangentes à un cylindre de révolution. 6. Les bisécantes issues d'un point de l'hyppopède. 7. Les sections  $z = 0$ . Autres sections planes. 8. Les intersections avec des cylindres de révolution tangents au plan  $x = 0$ . 9. Le plan tangent. Les contours apparents. 10. La trace de la surface des normales aux points d'une hyppopède  $\delta = \text{const.}$  ou d'une parabole  $\omega = \text{const.}$  11. Le cône circonscrit de sommet sur  $Oz$ . 12. Certains cylindres paraboliques et la surface des centres. Autoreferat.

## Algebraische Geometrie:

**Ales, Maria:** Sulle curve legate alle determinazioni metriche su curve algebriche. Rend. Circ. mat. Palermo 58, 326—334 (1934).

Les déterminations métriques (longueur de l'arc, courbure, etc.) concernant une courbe plane algébrique  $C$ , ayant l'équation  $f(x, y) = 0$ , conduisent à la considération de la fonction (en général irrationnelle)  $z = \sqrt{f'_x{}^2 + f'_y{}^2}$ . La courbe gauche  $\Gamma$  lieu du point  $(x, y, z)$ , ou une des ses transformées birationnelles, est nommée par l'a. l'image métrique de  $C$ . Elle est réductible dans le cas (et seulement dans le cas) où  $C$  est une courbe de direction; son utilité dans l'étude des propriétés métriques de  $C$  est manifeste: ainsi, p. ex., la longueur de l'arc de  $C$  est une intégrale abélienne attachée à  $\Gamma$ . — Ici l'a., après quelques simples remarques sur la correspondance (1, 2) qui passe entre  $C$  et  $\Gamma$ , approfondit le cas où  $C$  est une conique, et détermine toutes les cubiques planes ayant une image métrique de genre 1 ou 0. Suivent



quelques considérations concernant les transformations birationnelles des courbes planes qui opèrent aussi birationnellement sur les respectives images métriques, et la détermination des fonctions rationnelles sur  $C$  pour lesquelles on peut appliquer le théorème d'Abel à l'intégrale qui donne l'arc de  $C$  [sur ce point cfr. aussi G. Humbert, *J. École polytechn.* 57, 171 (1887), et *J. Math. pures appl.*, IV. s. 3, 327 (1887).]

*Beniamino Segre (Bologna).*

**Dyba, K.: Unikursale Plankurve 3. Ordnung als Ort der Berührungspunkte einer Kegelschnittschar mit einem Strahlenbüschel.** *Wiadom. mat.* 38, 43—67 (1935) [Polnisch].

In vorliegender Abhandlung betrachte ich die geometrischen Eigenschaften der unikursalen Plankurve 3. Ordnung  $C^3$ . Ich bestimme den Doppelpunkt dieser Kurve, ihre Ordnungs- und Klassenzahl und die Anzahl der Wendetangenten. Ich beweise: Sind die Tangenten der Kurve im Doppelpunkte reell und getrennt, so ist von den drei Wendetangenten nur eine reell und die zwei anderen konjugiert imaginär. Andernfalls, wenn die Doppelpunktstangenten konjugiert imaginär sind, sind alle drei Wendetangenten reell. Nachher konstruiere ich die sämtlichen Punkte und die Tangenten der Kurve  $C^3$  in diesen Punkten. Ich führe weiter einen Beweis des Satzes von Poncelet, für  $n = 3$ , durch: die Tangenten der unikursalen Kurve 3. Ordnung, die in den Schnittpunkten der Kurve mit einer beliebigen Geraden  $g$  geführt werden, schneiden diese Kurve in drei Punkten einer Geraden  $d$ . Die Geraden  $d$  und  $g$  bilden eine Korrespondenz [L4]. Jede so erhaltene Gruppe der Geraden  $g$  bildet je ein Vierseit, das eine Kegelschnittschar bestimmt; die Berührungspunkte jeder Kegelschnittschar mit dem festen Strahlenbüschel ( $P$ ) erzeugen dieselbe unikursale Kurve 3. Ordnung  $C^3$ .

*Autoreferat.*

**Gherardelli, G.: Sulle serie lineari semplicemente infinite con lo stesso gruppo jacobiano.** *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 21, 261—263 (1935).

Haben zwei rationale Funktionen  $x_1, x_2$  auf einer algebraischen Kurve vom Geschlecht  $p > 0$  denselben Verzweigungsdivisor (Jacobische Punktgruppe), so gilt nach Severi im allgemeinen  $x_2 = ax_1 + b$  ( $a, b = \text{konst.}$ ). Doch gibt es Ausnahmen, wofür Verf. ein Beispiel gibt: Auf einer ebenen  $C_8$  mit 2 vierfachen Punkten und 8 Cuspidi schneiden die Geradenbüschel mit den beiden vierfachen Punkten als Zentren zwei Scharen  $g_4^1$  aus, die keiner  $g_4$  gemeinsam angehören, aber die Jacobische Gruppe, das sind die 8 Cuspidi, gemein haben.

*Kähler (Hamburg).*

**Roth, L.: Some types of irregular surfaces.** *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 31, 159 bis 173 (1935).

Verschiedene, teils bekannte, Beispiele von irregulären algebraischen Flächen mit ihren projektiven Konstruktionen und Charakteren. Insbesondere eine Picardsche Fläche  $F^{10}$  des Raumes  $S_4$ , die als besonderen Fall eine von A. Comessatti betrachtete Jacobische Fläche  $\Phi^{10}$  enthält. Als Anhang eine allgemeine Bemerkung von A. Comessatti (dem Verf. brieflich mitgeteilt) über die irregulären  $F^{10}$  des Raumes  $S_4$ , die das Schnittgeschlecht 6 haben, und der Klasse der Regelflächen nicht angehören. [Auch die  $F^6$  des § 4. 4 ist nicht neu; vgl. Togliatti, *Mem. Ist. Lombardo Sci.* (3) 12, Nr. 83 (1916).]

*E. G. Togliatti (Genova).*

● **Dubreil, Paul: Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'algèbre moderne.** (*Actualités scient. et industr.* Nr. 210. *Exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand.* XII.) Paris: Hermann & Cie. 1935. 33 pag. Frs. 10.—.

Verf. gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein homogenes Polynomideal  $a$  keine uneigentliche Komponente (eine Komponente, deren Mannigfaltigkeit die Varietät  $x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$  ist) besitzt, und transformiert diese Bedingung für einen Fall, der für die geometrischen Anwendungen wichtig ist [vgl. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 196, 1270 (1933); dies. Zbl. 6, 388]. Er betrachtet die Basis eines homogenen Polynomideals ohne uneigentliche Komponente. Dann gibt er geometrische Anwendungen, die sich auf den Noetherschen Fundamentalsatz beziehen

(vgl. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 84, 1637; dies. Zbl. **6**, 127; **7**, 31). Einige dieser Anwendungen findet man ausführlicher in seiner Abhandlung im Bull. Soc. Math. France **61**, 258 (1933); dies. Zbl. **8**, 129.  
G. Schaafe (Groningen).

**Wong, B. C.:** Certain contact properties of linear systems of hypersurfaces. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 207—215 (1935).

Verf. betrachtet in einem Raume  $S_r$  die Hyperflächen der Ordnung  $n$  eines  $\infty^e$  Linearsystemes  $\Sigma$ , die eine gegebene  $V_k^N$  berühren. Abbildung von  $\Sigma$  auf die Punkte eines Raumes  $S_\rho$ . Insbesondere die Fälle  $r = \rho = 2$ ;  $n = 2, r = \rho$ ;  $n = 2, r = \rho = 3$ ; in den beiden letzten Fällen wird auch  $N = 1$  vorausgesetzt, und es werden die Quadriken von  $\Sigma$  betrachtet, die einen  $S_{r-1}$  oder einen im  $S_{r-1}$  enthaltenen  $S_{r-2}$  oder einen im  $S_{r-2}$  enthaltenen  $S_{r-3}$  usw. berühren. [Für den Fall  $r = \rho = 2$  siehe L. Cremona, Ann. di Matem. (1) **6**, 153, § 13—25 (1864); Opere **2**, 140.] Togliatti (Genova).

**Wong, B. C.:** On a certain non-linear one-parameter system of hypersurfaces of order  $n$  in  $r$ -space. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 259—264 (1935).

In einem Raume  $S_r$  sind  $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_t$  projektiv verwandte Kurven  $C_{11}C_{12}\dots C_{1\nu_1}, C_{21}C_{22}\dots C_{2\nu_2}, \dots, C_{t1}C_{t2}\dots C_{t\nu_t}$  und ein  $\infty^e$  Linearsystem  $|W|$  von Hyperflächen gegeben. Wenn  $P_{11}\dots P_{t\nu_t}$  eine beliebige Gruppe entsprechender Punkte jener Kurven bedeutet und wenn  $\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + t\nu_t = \rho$ , so gibt es im allgemeinen in  $|W|$  eine Hyperfläche, die  $P_{11}\dots P_{1\nu_1}$  enthält, die in  $P_{21}\dots P_{2\nu_2}$  eine Berührung 1. Ordnung mit  $C_{21}\dots C_{2\nu_2}$  hat, die in  $P_{31}\dots P_{3\nu_3}$  eine Berührung 2. Ordnung mit  $C_{31}\dots C_{3\nu_3}$  hat usw. Solche Hyperflächen bilden, bei veränderlichem  $P_{11}$ , ein  $\infty^1$  nichtlineares System  $\{v\}$ . Es wird mit zwei Methoden die Anzahl der Hyperflächen von  $\{v\}$  bestimmt, die durch einen Punkt hindurchgehen, und auch die Anzahl derjenigen, die einen gegebenen  $S_k$  berühren. Ein Beispiel (in der Ebene, mit drei  $C^3$  und die  $\infty^6$   $C^4$  die 8 gegebene Punkte enthalten); besondere Fälle. E. G. Togliatti.

**Coble, A. B.:** The geometry of the Weddle manifold  $W_p$ . Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 209—222 (1935).

**Coble, Arthur B., and Josephine H. Chanler:** The geometry of the Weddle manifold  $W_p$ . Amer. J. Math. **57**, 183—218 (1935).

Die erste dieser beiden Abhandlungen ist eine kurze Zusammenfassung der zweiten und ist in einer Sitzung der Amer. Math. Soc. vorgetragen worden; die ganze Untersuchung ist eine Fortsetzung früherer Arbeiten von A. B. Coble [Amer. J. Math. **52**, 439—500 (1930)]. In einem Raume  $S_{2p-1}$  sind  $2p + 2$  Punkte  $p_1p_2\dots p_{2p+2}$  allgemeiner Lage gegeben; nimmt man  $p_3\dots p_{2p+2}$  als Fundamentalpunkte der Koordinaten, und nennt man  $y_i, z_i$  die Koordinaten von  $p_1, p_2$ , so geben die Formeln  $x'_i x_i = y_i z_i$ , in den Veränderlichen  $x_i, x'_i$ , eine Cremonasche Involution  $I_{12}$ , die  $p_1$  mit  $p_2$  vertauscht und  $p_3\dots p_{2p+2}$  als Fundamentalpunkte besitzt; es gibt  $\binom{2p+2}{2}$  solche Involutionen; sie erzeugen eine Abelsche Gruppe  $G$  der Ordnung  $2^{2p+1}$ ;  $G$  enthält eine Involution  $I$ , die alle gegebenen Punkte als  $2p(p-1)$ -fache Fundamentalpunkte besitzt; Ort der Fixpunkte von  $I$  ist die Weddlesche  $W_p$ , die hier betrachtet wird. Von dieser Definition ausgehend, studieren Verff. das System  $\Sigma$  aller  $V_{2p-2}^p$ , die die Punkte  $p_i$  als  $(p-1)$ -fache Punkte besitzen; sie finden zunächst alle Basismannigfaltigkeiten von  $\Sigma$ ; einige Schwierigkeiten bietet die Bestimmung der Dimension  $2^p - 1$  von  $\Sigma$  und der Dimensionen derjenigen Untersysteme von  $\Sigma$ , die Fundamentalörter der Involutionen der Gruppe  $G$  enthalten;  $\Sigma$  liefert die Abbildung von  $W_p$  auf eine Kummerische  $K_p$  hyperelliptischen Typus. Man kann  $W_p$  auch folgendermaßen konstruieren. Zwei Punktgruppen  $A_1\dots A_n$  in  $S_r$  und  $B_1\dots B_n$  in  $S_{n-r}$  nennt A. B. Coble „assoziert“, wenn ihre Koordinaten  $a_{1i}\dots a_{ni}$  und  $b_{1j}\dots b_{nj}$  so beschaffen sind, daß  $a_{1i}b_{1j} + \dots + a_{ni}b_{nj} = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ;  $j = 0, 1, \dots, n-r$ ); Kollineationen in  $S_r$  oder  $S_{n-r}$  lassen diese Beziehung unzerstört. Nun sei in einer Ebene eine Kurve  $H$  der Ordnung  $p+2$  mit einem festen  $p$ -fachen Punkt  $O$  gegeben; die  $2p+2$  Geraden durch  $O$ , die  $H^{p+2}$  anderswo in  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2p+2}$  berühren, hält man ebenfalls fest; man nimmt jetzt in einem  $S_{2p-1}$  eine Normalkurve  $N^{2p-1}$  und auf dieser  $2p+2$  Punkte



$p_1 p_2 \dots p_{2p+2}$ , die zu jenen  $2p+2$  Geraden  $OQ_i$  projektiv seien; wenn die Punkte des Raumes  $S_{2p-1}$  mit Koordinaten in bezug auf  $N^{2p-1}$  bestimmt werden, so gibt es einen Punkt  $\alpha$  derart, daß  $OQ_i$  und  $\alpha p_i$  assoziierte Punktgruppen sind; Ort von  $\alpha$  bei veränderlicher Kurve  $H$  ist wieder die Weddlesche  $W_p$ . Diese beiden Konstruktionen für  $W_p$  gestatten verschiedene parametrische Darstellungen für  $W_p$  zu finden und eine Reihe schöner Eigenschaften von  $W_p$  und  $K_p$  zu beweisen. Die folgenden z. B.: ein Punkt von  $W_p$  und die Punkte, ebenfalls von  $W_p$ , die ihm in den Involutionen von  $G$  entsprechen, bilden eine Gruppe von  $2^{2p+1}$  Punkten, die durch Projektion von  $p_i$  aus in sich selbst transformiert wird; die Schnittkurve von  $W_p$  mit einem  $S_p$ , die  $p+1$  allgemeine Punkte von  $N^{2p-1}$  verbindet, enthält  $\infty^1$  interessante Konfigurationen von  $\binom{2p+2}{p}$  Punkten; die Punkte von  $W_p$ , die besonderen Arten hyperelliptischer  $H^{p+2}$  entsprechen (deren Punkte  $Q_i$  auf einer  $C^2$  oder  $C^3$  oder  $C^4$  usw. liegen), bilden auf  $W_p$  besondere Örter  $V_2, V_4, V_6, \dots$ ; usw. Schließlich die besonderen Fälle  $p=2, 3, 4, \dots$

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Baker, H. F.:** The genus of a developable surface. Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 156—158 (1935).

Beweis, daß die Cayleysche Formel zur Berechnung des Geschlechts einer abwickelbaren Fläche zum Wert  $-p$  führt, wo  $p$  das Geschlecht der Rückkehrkurve  $C$  jener Fläche bedeutet; wenigstens im Falle, wo die Kurve  $C$  keine Doppelpunkte, Doppeltangenten, Doppelschmiegungebenen und Inflexionspunkte besitzt.

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Eckhart, L.:** Das Striktionsband der hyperbolischen Regelschar. Anz. Akad. Wiss., Wien 1935, 114 (Nr. 12).

Vorläufige Mitteilung: Das Striktionsband (Zentraltangentenfläche) einer Regelschar auf dem einschaligen Hyperboloid ist eine rationale Regelfläche 6. Ordnung mit einer Doppelkurve 10. Ordnung. Diese zerfällt in Raumkurven 4. und 6. Ordnung dann, wenn das Hyperboloid in einem Hauptschnitt eine gleichseitige Hyperbel besitzt.

*L. Eckhart (Wien).*

### Differentialgeometrie:

**Lane, Ernest P.:** A canonical power series expansion for a surface. Trans. Amer. Math. Soc. 37, 463—482 (1935).

Le développement cherché est  $z = x^2 + y^2 + x^3 + Ay^3 + Bx^4 + Cy^4 + \dots$ . Le tétraèdre de référence ( $Oxyz$ ) est construit sur deux tangentes conjuguée  $Ox, Oy$ . Les sommets  $x, y$  sont conjugués dans la correspondance de Segre aux plans  $Oyz, Oxz$ ; ces plans touchent le cône de Segre et le sommet  $z$  vérifie certaine relation par rapport aux points où  $Oz$  perse la quadrique de Wilczynski, celle de Lie et deux quadriques osculatrices asymptotiques liées aux sections de la surface  $S$  par les plans  $Oxz$  et  $Oyz$ . L'auteur applique ses formules à l'examen des propriétés des sections planes de  $S$  par les plans qui passent par  $Ox$ . Exemple: Il existe deux sections mentionnées dont l'ordre de contact avec la conique osculatrice est plus élevées; leurs plans divisent harmoniquement les plans  $Oxy$  et  $Oxz$ .

*S. Finikoff (Moscou).*

**Myller, A.:** Théorème complémentaire de celui de Minding sur la déformation des surfaces réglées. Ann. Sci. Univ. Jassy 20, 1—4 (1935).

L'auteur donne une démonstration analytique du théorème qu'il a récemment démontré par le voie synthétique (ce Zbl. 8, 411).

*S. Finikoff (Moscou).*

**Nagabhushanam, K.:** On expressing the equations of any congruence of curves in the Hamiltonian form. Math. Student 2, 129—131 (1934).

Starting with a congruence of curves in an  $n$ -space, written in the form  $x^j = \text{const.}$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ), the author considers their expression as a first system of Pfaff derived from a form  $\sum_{i=1}^n X_i dx^i$ . When  $n = 2r + 1$ , he puts  $X_i = \partial\psi/\partial x^i + f_i$ , where  $\psi$  is an arbitrary function of all the coordinates,  $f_1, \dots, f_{2r}$  are functions of  $x^1, \dots, x^{2r}$

such that the rank or class of the form  $\sum_{j=1}^{2r} f_j dx^j$  is  $2r$ , and  $f_{2r+1}$  is a function of  $x^{2r+1}$ .  
 When  $n = 2r + 2$ , he associates a first integral of the congruence with such a system of Pfaff equivalent to  $2r + 1$  of the equations of the congruence. *J. L. Synge.*

**Behari, Ram:** A significant integral invariant in the theory of rectilinear congruences. Indian Math. Soc., N. s. 1, 135—142 (1934).

Il s'agit de l'intégrale  $p = \int_C (X dx + Y dy + Z dz)$  où  $X, Y, Z$  sont les cosinus directeurs d'un rayon  $r$  d'une congruence  $K$  et  $C$  est une courbe fermée qui coupe  $r$ . Si  $S$  est une aire limitée par  $C$ ,  $\sigma$  l'aire de l'image sphérique de  $S$  par les rayons de  $K$ ,  $2\varrho$  la distance focale et  $\omega$  l'angle des plans focaux, on a à la limite quand  $C$  se réduit à un point,  $\frac{dp}{d\sigma} = 2\varrho \cot \omega =$  le paramètre moyen de  $K$ . De même  $\frac{dp}{ds} =$  la courbure géodésique de la ligne enveloppée par  $r$  sur une nappe focale. Si le rayon  $PP'$  touche les lignes  $MP$  ( $v = \text{const}$ ) et  $P'M'$  ( $u = \text{const}$ ) sur les nappes focales et

$$\theta = \text{arc } MP + PP' + \text{arc } P'M', \text{ on a } p = - \iint \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} du dv.$$

*S. Finikoff (Moscou).*

**Rössler, Fred:** Über die Affinnormalen der ebenen Schnittkurven in einem Flächenpunkt. Mh. Math. Phys. 42, 97—100 (1935).

Zunächst wird der Satz bewiesen: Schneidet man eine im Punkte  $O$  nicht parabolisch gekrümmte Fläche mit den Ebenen eines Büschels, dessen Achse durch  $O$  geht, aber nicht in der Tangentenebene der Fläche liegt, so bilden die Affinnormalen aller ebenen Schnittkurven in  $O$  einen Kegel 4. Ordnung 6. Klasse, der die Achse des Ebenenbüschels als dreifache Erzeugende besitzt und längs der Haupttangente in  $O$  die Tangentenebene der Fläche berührt. Daraus werden zwei Sätze über windschiefe Regelflächen abgeleitet. — Kennt man in einem Punkte  $O$  einer windschiefen Regelfläche die beiden Haupttangente, die Affinnormale der Fläche und die Affinnormale irgendeiner ebenen Schnittkurve, so läßt sich die Affinnormale jeder durch  $O$  gehenden ebenen Schnittkurve planimetrisch konstruieren.

*W. Haack (Danzig).*

**Watanabe, S.:** Sur la géométrie projective des espaces à connexion affine. Jap. J. Math. 11, 185—193 (1935).

Die Koeffizienten der projektiven Konnexion in bezug auf die Gruppe

$$a) 'x^a = 'x^a(x^1, \dots, x^n), \quad b) 'x^0 = x^0 + \log A \quad (a, b, c = 1, \dots, n) \quad (1)$$

bezeichnet werden mit  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} \equiv \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}(x^1, \dots, x^n)$  bezeichnet werden ( $\lambda, \mu, \nu = 0, 1, \dots, n$ ). Wenn  $\varphi_{\lambda}$  ein Tensor in bezug auf (1)a und  $\varphi_{\lambda}$  [mit  $\varphi_0 = 1$ ] ein Vektor in bezug auf (1)a, b ist, so stellen die Koeffizienten

$$A_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \theta_b^a \varphi_c - \theta_c^a \varphi_b \quad (2)$$

die affine Konnexion [in bezug auf (1)a] dar. Zu zwei verschiedenen Vektoren  $\varphi_{\lambda}$  und  $\bar{\varphi}_{\lambda}$  (mit  $\varphi_0 = \bar{\varphi}_0 = 1$ ) gehören zwei Konnexionen  $A_{bc}^a$  und  $\bar{A}_{bc}^a$ , wobei

$$\bar{A}_{bc}^a = A_{bc}^a + \theta_b^a \psi_c + \theta_c^a \psi_b \quad (\psi = \varphi - \bar{\varphi}). \quad (3)$$

Allgemein ist also (3) keine bahntreue Transformation, wenn  $\theta_b^a \neq \delta_b^a$  ist. (Ref.) Der Verf. untersucht die in bezug auf (3) invarianten Eigenschaften. In Anlehnung an Eisenhart (Non-Riemannian geometry. 1927) werden Kriterien aufgestellt, wann zwei Konnexionen  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$  und  $*\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$  äquivalent sind, und außerdem auch unter anderem, wann  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$   $r$ -affine Isomorphismen zuläßt. Dabei versteht man unter affiner Isomorphie die Punkttransformation  $y^{\lambda} = x^{\lambda} + \xi^{\lambda} dt$ , welche die in bezug auf (3) invarianten Eigenschaften in Ruhe läßt.

*Hlavatý (Praha).*

**Takasu, Tsurusaburo:** Ein neues Dualitätsprinzip bei den Kurven im konformen Raum. Jap. J. Math. 11, 195—211 (1935).

Es bedeuten  $(y_i)$  mit  $(yy)_5 = 1$  die pentasphärischen Koordinaten der Schmiege-  
 gel,  $\left(\frac{dy_i}{d\vartheta}\right)$  mit  $\left(\frac{dy_i}{d\vartheta} \frac{dy_i}{d\vartheta}\right)_5 = 1$  die pentasphärischen Koordinaten der Normalkugel



und  $\left(\frac{d^2 y_i}{d\vartheta^2}\right)$  mit einer entsprechenden Nebenbedingung die Kugel, welche die Schmiegungskugel  $(y_i)$  im Kurvenpunkt  $(\bar{x}_i(s))$  [mit den Bedingungen  $(\bar{x}\bar{x})_5 = 0$ ,  $(d\bar{x} d\bar{x})_5 = d\bar{x}^2$  von außen berührt und zur Normalkugel senkrecht steht.  $(\bar{x}_i)$  ist die Absolutkugel im nichteuklidischen Raum. Dann betrachten wir zwei Paare von Gebilden, nämlich  $(\bar{x}_i)$  und das bezüglich  $(\bar{x}_i)$  invers genommene Bild  $(\bar{x}_i)$ , dann die beiden Nullkugeln  $(\bar{y}_i)$  und  $(\bar{y}_i)$  des Kugelbüschels  $\left(1 \cdot \frac{dy_i}{d\vartheta} + m \frac{d^2 y_i}{d\vartheta^2}\right)$ . Die Differentialgeometrie der beiden Paare von Gebilden ist ganz analog zu behandeln, dieses Dualitätsprinzip läßt sich mit geringen Änderungen für Kugelscharen im konformen Raum und für Kurven im konformen Raum verfolgen. Heinrich Schatz (Innsbruck).

**Bompiani, E.: Risultati recenti di geometria differenziale.** Esercit. Mat., II. s. 103—114 (1935).

I risultati recenti dei quali intendo parlarvi sono quelli relativi alla topologia differenziale. Auszug.

### Topologie:

**Borsuk, Karol: Contribution à la topologie des polytopes.** Fundam. Math. 25, 53 bis 58 (1935).

Ein zusammenhängendes Polytop  $P$ , das entweder höchstens  $n$ -dimensional oder im (euklidischen)  $R_{n+1}$  eingebettet ist, ist Summe von zwei Polytopen  $P_1$  und  $P_2$ , wo  $p_n(P_1) = 0$ ,  $p_i(P_1) = p_i(P)$  für  $i \neq n$  ( $p_i$  bedeutet die  $i$ -te Bettische Zahl) und  $P_2$  in sich zusammenziehbar ist. Hieraus wird für in den  $R_3$  eingebettete Polytope gefolgert: Falls jede stetige Abbildung von  $P$  auf eine Teilmenge von sich selbst einen Fixpunkt besitzt, so ist nicht nur  $p_1(P) = 0$  (was für viel allgemeinere Räume  $P$  zutrifft), sondern auch  $p_2(P) = 0$ . Čech (Brno).

**Čech, Eduard: Les groupes de Betti d'un complexe infini.** Fundam. Math. 25, 53 bis 54 (1935).

Es werden die Bettischen Gruppen unendlicher Komplexe definiert (und zwar ausgehend von den algebraischen Komplexen, erklärt als Linearformen mit endlich vielen von Null verschiedenen Koeffizienten). Als Koeffizientenbereich tritt eine beliebige Abelsche Gruppe auf. Verf. beweist nun den für den Aufbau der allgemeinen kombinatorischen Topologie außerordentlich wichtigen Satz: Die Bettischen Gruppen eines (abzählbar) unendlichen Komplexes  $K$  nach einem beliebigen Koeffizientenbereich  $J$  lassen sich durch  $J$  und die Bettischen Gruppen von  $K$  nach dem Ring der ganzen Zahlen ausdrücken. Genauer ausgedrückt lautet das Ergebnis folgendermaßen. Es sei  $B^n$  die  $n$ -dimensionale ganzzahlige Bettische Gruppe von  $K$ ,  $T^n$  die  $n$ -dimensionale Torsionsgruppe (die aus den Elementen endlicher Ordnung bestehende Untergruppe von  $B^n$ ).  $B^n$  bzw.  $T^{n-1}$  seien durch die erzeugenden  $a_1, a_2, \dots$  evtl. in inf. bzw.  $b_1, b_2, \dots$  evtl. in inf. und die definierenden Relationen  $\sum p_{ki} a_i = 0$  bzw.  $\sum q_{ki} b_i = 0$  mit ganzzahligen  $p_{ki}, q_{ki}$ , von denen jedesmal nur endlich viele von Null verschieden sind, definiert. Ist  $B_J$  die  $n$ -dimensionale Bettische Gruppe von  $K$  nach dem Koeffizientenbereich  $J$ , so läßt sich  $B_J$  als direkte Summe zweier Untergruppen  $B'$  und  $B''$  darstellen. Dabei ist  $B'$  bis auf Isomorphie die Gruppe der Linearformen  $\sum g_i x_i$  in den Unbestimmten  $x_i$  mit den Koeffizienten aus  $J$  und den definierenden Relationen  $\sum p_{ki} g_i x_i = 0$  (für beliebiges  $g \subset J$ ), während

$B''$  bis auf Isomorphie die Gruppe der Linearformen  $\sum g_k y_k$  ist, wobei die  $g_k$  durch die Bedingungen  $\sum q_{ki} g_k = 0$  eingeschränkte und sonst beliebige Elemente von  $J$  sind. Als Linearformen werden dabei durchweg nur solche mit endlich vielen von Null verschiedenen Koeffizienten betrachtet. Aus dem Obigen folgt übrigens, daß  $B_J$  sich durch  $J$  und  $T^{n-1}$  ausdrücken läßt. Der hier besprochene Satz wurde im Fall endlicher Komplexe von Hopf bewiesen (erscheint demnächst in Alexandroffs Hopfs Topologie I. Grundlehren d. math. Wissens 44. Berlin: Julius Springer); der

speziellfall der Koeffizientenbereiche modulo  $m$  wurde (ebenfalls nur für endliche Komplexe) noch früher von Alexander [Trans. Amer. Math. Soc. 28, 301—329 (1926)] behandelt.

*P. Alexandroff* (Moskau).

**Freudenthal, Hans:** Die Hopfsche Gruppe, eine topologische Begründung kombinatorischer Begriffe. *Compositio Math.* 2, 134—162 (1935).

Bruschlinsky [Math. Ann. 109, 525—537 (1934); dies. Zbl. 8, 373] hat die Menge aller stetigen Abbildungen einer kompakten abgeschlossenen Menge  $F$  in die  $S^1$  bzw. in die  $S^3$  als Gruppe betrachtet: Da die  $S^1$  und die  $S^3$  Gruppen sind, kann man als Produkt zweier Abbildungen  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  von  $F$  in die  $S^1$  bzw.  $S^3$  diejenige Abbildung  $f$  definieren, die jedem Punkt  $x$  von  $F$  den Punkt  $f_1(x) \cdot f_2(x)$  zuordnet (abei wird das Produkt  $f_1(x) \cdot f_2(x)$  im Sinne der in  $S^1$  bzw.  $S^3$  definierten Gruppenmultiplikation verstanden). Die Komponenten der so gewonnenen topologischen Gruppe bilden wiederum eine Gruppe: die Faktorgruppe nach der Komponente der Identität; diese Komponenten sind die Abbildungsklassen. Man erhält so die Gruppe der Abbildungsklassen von  $F$  in die  $S^1$  bzw.  $S^3$ . Die hier skizzierte Konstruktion fährt in der vorliegenden Arbeit eine gewaltige Verallgemeinerung, indem die Abbildungen von  $F$  in die  $S^n$  bei beliebigem  $n$  betrachtet werden. Dabei wird die  $S^n$  als eine Art „verallgemeinerte“ Gruppe aufgefaßt: Man betrachtet die  $S^n$  zunächst als Gesamtheit der  $n$ -upel reeller Zahlen, ergänzt durch  $\infty$ , wobei alle Punkte mit mindestens einer unendlichen Koordinate in diesen Punkt  $\infty$  zusammenfallen. Es wird folgendermaßen die „Gruppen“operation, die Addition, erklärt:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n).$$

abei dürfen die Punkte mit  $a_1 = a_2 = 0$  nicht mit dem Punkt addiert werden. Dementsprechend dürfte die so gewonnene verallgemeinerte Gruppe als „Gruppe mit Singularitäten“ bezeichnet werden. Sodann bilden die Abbildungen von  $F$  in die  $S^n$  ebenfalls eine „Gruppe mit Singularitäten“; die Komponenten dieser Gruppe, die Abbildungsklassen, bilden jedoch (das beweist der Verf.) eine richtige Gruppe: die Hopfsche Gruppe, die somit als direkte Verallgemeinerung der Bruschlinskyschen Gruppe anzusprechen ist. Die Existenz der Hopfschen Gruppe beruht darauf, daß man in irgend zwei Klassen je eine Abbildung so wählen kann, daß für diese Abbildungen die Addition erklärt ist. Für die höchstdimensionale Hopfsche Gruppe eines Polyeders  $P$  und die Bettische Gruppe (derselben Dimensionszahl) von  $P$  beweist der Verf. einen Dualitätssatz, indem er die Primitivität (im Sinne von Pontrjagin) der modulo  $m$  reduzierten Hopfschen Gruppe zu der Bettischen Gruppe modulo  $m$  stellt. Als Pontrjaginsches Produkt einer Abbildungsklasse und eines Zyklus mod  $m$  tritt dabei der Abbildungsgrad mod  $m$  auf. Entsprechendes gilt auch „modulo Null“. Auch dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Bruschlinsky. Die Methoden des Verf. werden mit der Betrachtung von direkten und inversen Homomorphismenfolgen kombiniert und ergeben so Resultate für beliebige kompakte Mengen. Insbesondere gilt: Die Hopfsche Gruppe einer  $F \subset S^n$  ist (für die Dimensionszahl  $n-1$ ) eine freie Abelsche Gruppe von  $c+1$  unabhängigen Erzeugenden, wobei  $c$  die Komponentenzahl von  $S^n - F$  ist.

*P. Alexandroff*.

**Freudenthal, Hans:** Über die topologische Invarianz kombinatorischer Eigenschaften des Außenraumes abgeschlossener Mengen. *Compositio Math.* 2, 163—176 (1935).

Beweis des Satzes, daß homöomorphen kompakten abgeschlossenen Punktmengen  $F_1$  und  $F_2$  des  $R^n$  isomorphe Bettische Gruppen von  $R^n - F_1$  bzw. von  $R^n - F_2$  entsprechen. Dieser Satz, welcher aus den vor kurzem erschienenen allgemeinen Resultaten von Pontrjagin [Ann. of Math. 35, 904—914 (1934); dies. Zbl. 10, 180] folgt, wird hier direkt, und zwar mit elementaren Hilfsmitteln bewiesen. Dieser Beweis beruht auf folgendem neuen Erweiterungssatz, welcher an und für sich großes Interesse beanspruchen dürfte: Jede stetige Abbildung von  $F_1 \subset S^n$  in  $F_2 \subset S^n$



läßt sich erweitern zu einer stetigen Abbildung vom Grade eins von  $S^n$  auf sich; dabei ist  $S^n$  wie üblich der  $n$ -dimensionale sphärische Raum. Verf. bemerkt Darin, daß bei Homologiebetrachtungen die Abbildungen vom Grade eins dasselbe leisten wie die topologischen, liegt der Kern zahlreicher topologischer Sätze.

*P. Alexandroff (Moskau).*

**Freudenthal, Hans:** Die  $R_n$ -adische Entwicklung von Räumen und Gruppen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 414—418 (1935).

Ist  $R_n$  für  $n = 1, 2, \dots$  eine Folge topologischer Räume,  $f_n$  eine stetige Abbildung von  $R_{n+1}$  auf  $R_n$ , so ist der durch diese  $f_n$  charakterisierte Limesraum der  $R_n$  der Unterraum des topologischen Produkts der  $R_n$ , der alle Punkte mit  $a_n = f_n(a_{n+1})$  erfüllenden Koordinaten enthält. Sind die  $R_n$  metrisierbar bzw. separabel bzw. kompakt, so gilt das Entsprechende vom Limesraum  $R$ . Es gilt dann der Satz, daß jeder kompakte separable Raum sich in dieser Weise als Limesraum von Polyedern gewinnen läßt. — Weiter kann man die  $d$ -dimensionalen Räume als solche charakterisieren, die Limesräume  $d$ -dimensionaler Komplexe sind, wobei die in die Limesdefinition eingehenden stetigen Abbildungen  $f_n$  eine gewisse Irreduzibilitätsbedingung erfüllen müssen. — Ist schließlich  $R$  Limesraum von Räumen  $R_n$ , so kann man die Bettischen Gruppen von  $R$  in sinnentsprechender Weise als Limesgruppen der Bettischen Gruppen der  $R_n$  gewinnen.

*Reinhold Baer (Manchester).*

**Alexander, J. W.:** Note on Pontrjagin's topological theorem of duality. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 21, 222—225 (1935).

Unendlich-dimensionale Verallgemeinerung des Alexander-Pontrjaginschen allgemeinen Dualitätssatzes: Es wird eine abgeschlossene Punktmenge  $F$  des Fundamentalquaders  $R^\infty$  des Hilbertschen Raumes betrachtet und die Pontrjaginsche Formulierung auf die  $r$ -dimensionale Bettische Gruppe von  $F$  und die „ $(\infty - r - 1)$ -dimensionale“ Bettische Gruppe von  $R^\infty - F$  ausgedehnt. Es kommt also alles nur darauf an, die „ $(\infty - r - 1)$ -dimensionale“ Bettische Gruppe von  $R^\infty - F$  zu definieren. Dieses Ziel wird leicht erreicht, sobald für jedes nichtnegative ganzzahlige  $r$  der Begriff eines  $(\infty - r)$ -dimensionalen Zyklus im  $R^\infty$  vernünftig gefaßt ist. Diese Aufgabe löst der Verf. folgendermaßen. Man betrachte im  $R$  ein endliches System von linearen Ausdrücken  $\sum_i a_{i,s} x_s + b_i = L_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , in welchen nur endlich viele Koeffizienten  $a_{i,s}$  von Null verschieden sind. Unter der Signatur eines Punktes  $x$  von  $R^\infty$  versteht man ein System von ganzen Zahlen  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , wobei  $\alpha_i$  den Wert  $-1, 0$  oder  $1$  hat, je nachdem  $L_i$  im Punkte  $x$  negativ, Null oder positiv ist. Jeder Punkt  $x$  gehört zu einer konvexen Menge, bestehend aus allen Punkten von  $R^\infty$ , die dieselbe Signatur wie  $x$  haben. Eine solche konvexe Menge heißt eine Zelle, und zwar eine  $(\infty - r)$ -dimensionale Zelle, wenn  $r$  und nicht mehr linear-unabhängige Ausdrücke  $L_i$  in den Punkten dieser Zelle verschwinden. Eine Koordinate  $x_s$  heißt signifikant, wenn sie mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten in mindestens einem  $L_i$  auftritt. Die signifikanten Koordinaten bestimmen einen endlich-dimensionalen Unterraum  $R^m$  von  $R^\infty$ , und dieser schneidet aus einer  $(\infty - r)$ -dimensionalen Zelle jeweils eine  $(m - r)$ -dimensionale Zelle aus. Indem man die Anschlußeigenschaften dieser endlich-dimensionalen Zellen auf die entsprechenden  $(\infty - r)$ -dimensionalen überträgt, erhält man eine aus den  $(\infty - r)$ -dimensionalen Zellen ( $r = 0, 1, \dots$ ) bestehende (endliche) „Zellenzerlegung“ von  $H$ . Die algebraischen Komplexe, insbesondere die Zyklen dieser „Zellenzerlegung“, sind die gesuchten. Zu diesen „Zellenzerlegungen“ werden wie in der gewöhnlichen kombinatorischen Topologie duale Schemata konstruiert, wobei diese Schemata gewöhnliche endliche Komplexe sind. Die weitere technische Durchführung beruht in üblicher Weise auf der Betrachtung einer „unendlich-fein werdenden“ Folge von sukzessiven „Unterteilungen“ der „Zellenzerlegung“, wobei eine „Unterteilung“ durch Hinzufügung weiterer linearer Ausdrücke entsteht.

*P. Alexandroff (Moskau).*

Moore, R. L.: A set of axioms for plane analysis situs. *Fundam. Math.* 25, 13—28 (1935).

Verf. stellt an die Spitze seines Axiomensystems zwei undefinierte Begriffe, den des Stückes und den des Eingebettetseins. In der Ebene kann man nachträglich das Stück interpretieren als ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet; dann bedeutet das Stück  $x$  ist eingebettet in das Stück  $y$  „einfach  $\bar{x} \subset y$ “. Axiom 2 und 3 besagen, daß die Relation des Eingebettetseins transitiv und nichtkommutativ ist. Im Axiom 1 wird die Existenz einer „erzeugenden“ Folge von Stückmengen mit gewissen Eigenschaften verlangt, mit deren Hilfe es gelingt, 1. die Begriffe eines Punktes, eines Aufpunktes, eines Gebietes und der Begrenzung einer Punktmenge einzuführen, den Begriff des Zusammenhanges einer Punktmenge zu definieren und z. B. zu zeigen, daß jedes Gebiet bogenverknüpft ist. Durch die Axiome 4 und 5 wird erreicht, daß die Menge  $S$  aller Punkte zusammenhängend ist und durch keinen Punkt zerlegt wird. Durch das Axiom 6 wird erzwungen, daß, wenn die Summe zweier abgeschlossenen und kompakten Mengen  $H$  und  $K$  mit zusammenhängendem Durchschnitt zwei Punkte trennt, schon  $H$  oder  $K$  die Punkte trennen muß. Das Axiom 7 endlich hat zur Folge, daß  $S$  durch die Summe zweier kompakter Kontinua mit nicht zusammenhängendem Durchschnitt zerlegt wird und daß  $S$  speziell durch eine einfache geschlossene Kurve  $J$  in zwei zusammenhängende Gebiete mit  $J$  als Begrenzung zerlegt wird. Nachdem nun noch gezeigt ist, daß die Begrenzung jedes Gebietes, wenn sie nicht leer ist, kompakt ist, kann bewiesen werden, daß die Menge aller Punkte der Ebene oder zur Sphäre homöomorph ist [mit Hilfe von Ergebnissen aus „Foundations of point set theory“. *Amer. Math. Soc. Colloqu. Publ.* 13, Kap. VII (1932); *ies. Zbl.* 5, 54].

Nöbeling (Erlangen).

Kampen, Egbertus R. van: On some characterizations of 2-dimensional manifolds. *Amer. J. Math.* 1, 74—93 (1935).

Verf. gibt eine systematische Darstellung der vielen bekannten Kennzeichnungen der 2-dim. Sphäre, Zelle oder Mannigfaltigkeiten. Die Sätze konnten teilweise vereinfacht und verallgemeinert werden. In einem Anhang wird bewiesen, daß die 2-dim. verallgemeinerte Mannigfaltigkeit von Čech (*Ann. of Math.* 34, 621—730; *ies. Zbl.* 86) und Lefschetz (*Amer. J. Math.* 55, 469—504 (1933); *ies. Zbl.* 8, 85) eine gewöhnliche Mannigfaltigkeit ist.

Nöbeling (Erlangen).

Zippin, Leo: On semicompact spaces. *Amer. J. Math.* 57, 327—341 (1935).

Ein Raum heißt semi-kompakt, wenn er ein vollständiges Umgebungssystem besitzt, daß die Ränder dieser Umgebungen kompakt sind. Für separable, metrisierbare, vollständige Räume wird dann gezeigt: ein semi-kompakter Raum kann durch Hinzufügen einer abzählbaren Menge kompakt gemacht werden; läßt man aus einem kompakten Raum eine total-zusammenhangslose  $F_\sigma$  fort, so entsteht ein semi-kompakter Raum. — Ist der semi-kompakte Raum  $C$  überdies zusammenhängend, so existiert ein im wesentlichen eindeutig bestimmter Raum  $C^*$ , der  $C$  enthält, kompakt, zusammenhängend und im kleinen zusammenhängend ist, so daß  $C^* - C$  eine total-zusammenhangslose  $F_\sigma$  ist und so daß für jede offene, zusammenhängende Teilmenge  $D$  von  $C^*$  die Menge  $D - [D(C^* - C)]$  zusammenhängend ist; auch von diesem Einbettungssatz gilt eine Umkehrung. Speziell gilt, daß  $C^*$  nur dann „nicht-plättbare“ Kurven enthält, wenn  $C$  solche enthält. Weiter läßt sich aus diesem Einbettungssatz eine Verschärfung eines Freudenthalschen Einbettungssatzes für Gruppenräume gewinnen [vgl. H. Freudenthal, *Math. Z.* 33, 692—713 (1931); *ies. Zbl.* 2, 56].

Reinhold Baer (Manchester).

Rutt, N. E.: Prime ends and indecomposability. *Bull. Amer. Math. Soc.* 41, 265—273 (1935).

The author studies the relation between the indecomposability of the boundary  $\Gamma$  of a simply connected domain  $\gamma$  and the property of  $\gamma$  to have a prime end which includes all of  $\Gamma$ . It is shown that if  $\Gamma$  is indecomposable,  $\gamma$  has this property;



and, on the other hand, if  $\gamma$  has this property, then  $\Gamma$  is either indecomposable or the sum of two indecomposable continua. These results are generalized somewhat, it being shown in particular that if  $\Gamma$  contains any indecomposable continuum  $D$ , then there is a prime end of  $\gamma$  containing  $D$ .

G. T. Whyburn (Virginia).

**Čech, Eduard: Sur la connexité locale d'ordre supérieur.** Compositio Math. 2, 1—2 (1935).

Der höherdimensionale lokale Zusammenhang wird hier im Sinne des entsprechenden Homologiebegriffes [Alexandroff, Ann. of Math. 30, 181, Fußnote 63 (1929)] verstanden; er wird allerdings in seiner allgemeinsten Form, also rein topologisch und in bezug auf beliebige Koeffizientenbereiche untersucht. Der Darstellung gelang eine Zusammenfassung der allgemeinen Homologietheorie des Verf., entwickelt diesmal für beliebige Koeffizientenbereiche, voran. Es folgt darauf im zweiten Kapitel eine eingehende Untersuchung des lokalen Zusammenhanges sehr allgemeiner topologischer Räume. Es wird hier eine Reihe Bedingungen für den l. Z. gegeben. Insbesondere wird gezeigt, daß ein Raum dann und nur dann im Punkte  $a$  nulldimensional lokal-zusammenhängend ist, wenn es zu jeder  $U(a)$  eine solche  $V(a)$  gibt, daß  $\bar{V}(a)$  in einer Quasikomponente von  $U(p)$  liegt. Ein im Punkte  $a$  lokal zusammenziehbarer Raum ist in allen Dimensionen und für alle Koeffizientenbereiche lokal-zusammenhängend. Ferner wird bewiesen: Ein höchstens  $n$ -dimensionaler regulärer Raum mit endlicher  $n$ -ter Bettischer Zahl ist lokal-zusammenhängend in der Dimension  $n$ . Es werden auch Beziehungen zwischen l. Z. nach verschiedenen Koeffizientenbereichen aufgestellt. In der weiteren Darstellung rücken die Punktengen euklidischer Räume immer mehr in den Vordergrund. Von den hierher gehörenden Sätzen seien erwähnt:  $F \subset R^n$  ist dann und nur dann  $r$ -dimensional lokal-zusammenhängend, wenn jede Umgebung  $U(a)$  (in bezug auf den  $R^n$ ) eine Umgebung  $V(a)$  von folgender Eigenschaft enthält: Jeder  $(n-r-1)$ -dimensionale Zyklus in  $R^n - F \cdot \bar{U}(a)$  berandet in  $R^n - f \cdot V(a)$ . Dieser „Dualitätssatz“, der bei weiteren Untersuchungen auf diesem Gebiete sicher ein fundamentales Hilfsmittel sein wird, ist bereits im Falle  $n=2$ , wo er sich ganz elementar formulieren läßt, interessant. Ferner: Es seien  $F_1 \subset R^n, F_2 \subset R^n, a \in F_1 \cdot F_2$ . Wenn eine  $U(a)$  existiert, welche keine Komponente von  $R^n - (F_1 + F_2)$  und keine Komponente von  $R^n - F_1 \cdot F_2$  enthält, so existiert eine  $V(a)$ , welche weder von  $R - F_1$  noch von  $R^n - F_2$  eine Komponente enthält. Gewissermaßen zum selben Kreise lokaler „Phragmén-Brouwerscher“ bzw. „Janiszewskischer“ Sätze gehört auch folgendes sehr allgemeine Theorem, welches für beliebige vollständig normale Räume  $M$  gilt: Sind  $A$  und  $B$  abgeschlossene Mengen in  $R, R = A + B, a \in A \cdot B$ , ist  $R$   $(k+1)$ -dimensional-,  $A$  und  $B$   $k$ -dimensional-lokal-zusammenhängend in  $a$ , so ist  $A \cdot B$   $k$ -dimensional-lokal-zusammenhängend in  $a$ . Das Satz ist für jeden Koeffizientenbereich richtig.

P. Alexandroff (Moskau).

## Astronomie und Astrophysik.

**Krug, W.: Bahnformen im Gebiete der mehrfachen Lösungen bei der parabolischen Bahnbestimmung.** Astron. Nachr. 255, 433—452 (1935).

**Wilkins, A.: Untersuchungen zur Hecubabewegung und analoger Bewegungsformen.** Abh. bayer. Akad. Wiss., N. F. H. 27, 1—67 (1935).

Zur Berechnung der typischen Störungen der Hekubaplaneten (Periode annähernd gleich der halben Jupiterperiode) werden in der Fourierentwicklung der Störungsfunktion außer dem Säkularteil die langperiodischen Glieder mit dem Winkelargument  $\alpha\zeta + \alpha'\zeta'$  mit  $\zeta = l - 2l' + \tilde{\omega}$  und  $\zeta' = l - 2l' + \tilde{\omega}'$  ( $l, l'$  mittlere Längen des Planeten bzw. Jupiters,  $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$  deren Perihellängen) berücksichtigt. Die Delaunayreihen für die Differentialquotienten der Bahnelemente werden unter Benutzung der

entwicklungen Leverriers (Annales de l'observatoire de Paris. 10) aufgestellt und durch sukzessive Approximation integriert.

Klose (Berlin).

Kagan-Shabshai, J. F.: Nomograms for the computation of rectangular equatorial and galactic components of the velocities of stars. Russ. astron. J. 11, 605—609 u. engl. text 609—612 (1934) [Russisch].

Whipple, F. J. W.: On the relation between the mean velocity of the stars, the mean radial velocity and the mean transverse velocity. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 95, 2—444 (1935).

The results of W. M. Smart's paper: „Some Theorems in the Statistical Treatment of Stellar Motions“ [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 95, 116 (1934); this Zbl. 11, 87] discussed and new proofs of some of the formulae are given. K. Ogrodnikoff.

Nechvile, Vincent: Sur la dissymétrie des mouvements stellaires et sur une méthode pour la détermination de l'apex du soleil et du vertex de l'ellipsoïde des vitesses. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1379—1381 (1935).

In two previous papers [Bull. Astron. Inst. Netherlands, 4, VI, 173 (1924) and R. Acad. Sci., Paris 186, 848 (1928)] the author has derived a formula giving  $\bar{q}(\theta)d\theta$ , the number of stars within a given area of the celestial sphere whose proper motions exceed an arbitrary positive limit  $\varepsilon$  and have directions contained between the limits  $\theta$  and  $\theta + d\theta$

$$\bar{q}(\theta)d\theta = \sum_1^k C_k \frac{1}{p} \left[ e^{-\varepsilon^2 \Delta_k^2 p + 2\varepsilon \Delta_k \eta \sqrt{p}} + \eta e^{\eta^2} \int_{\varepsilon \Delta_k \sqrt{p} - \eta}^{\infty} e^{-x^2} dx \right] d\theta,$$

where

$$p = k^2 \cos^2 \theta + h^2 \sin^2 \theta, \quad \eta \sqrt{p} = k^2 u_0 \cos \theta + h^2 v_0 \sin \theta;$$

$k$  is a constant depending upon the number of stars of apparent magnitude  $m_k$ ,  $k$  and  $h$  are the constants of the velocity ellipsoid, while  $u_0$  and  $v_0$  are the components of the solar parallactic motion relative to the system of  $u, v$  axes the  $u$ -axis being directed toward the vertex of stellar motions. — In this note the author points out that the  $\bar{q}(\theta, \theta)$  curves which are in general asymmetrical, possess in three particular zones of the celestial sphere axial symmetry. — (1) The first zone is the locus of centres of areas where  $v_0 = 0$  which is a great circle passing through the solar apex and the vertex. The  $\bar{q}(\theta)$ -curve is symmetrical with respect to the  $u$ -axis. — (2) The second zone is the locus of centres of areas where  $u_0 = 0$ . It consists of two branches of the spherical ellipse defined by the equation in spherical co-ordinates  $x, y$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 a} + \frac{\tan^2 y}{\sin^2 a} \cos 2a = 1,$$

where  $2a$  denotes the angular distance apex-vertex. — This gives a new method of finding the position of the apex and vertex which are determined as the points of intersection of the above loci. On the other hand the general asymmetry of the  $\bar{q}(\theta)$ -curves permits to explain, at least qualitatively, the observed variations in the relative number of stars in the two Kapteyn streams.

Kyryll Ogrodnikoff (Moscow).

Krat, W.: The reflection effect in eclipsing binaries. Russ. astron. J. 11, 5—19 u. gl. Zusammenfassung 19—21 (1934) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß bei den Bedeckungsveränderlichen die Verteilung des sog. reflektierten Lichtes auf der Sternscheibe einem Gesetze folgt, bei welchem die Helligkeit zum Rande bis auf Null abfällt. Auf die Milnesche Theorie sich stützend und mit Benutzung einer Formel von Pike wird das Verhältnis vom reflektierten zum einfallenden Licht des Begleitsternes berechnet. Die erhaltene Formel gibt für kleine Radien des Begleiters mit Eddingtons Formel praktisch identische Werte. Darauf wird der Einfluß einer Elliptizität der Sterne betrachtet. Für eine Reihe von Bedeckungsveränderlichen wird eine gute Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung erhalten, Sterne jedoch mit stark verschiedenen Spektralklassen der Komponenten ergeben systematische Abweichungen, was damit im Einklang steht, daß das reflektierte Licht in Wirklichkeit einen Reemissionseffekt darstellt. Weiter werden



Formeln gegeben zur Berechnung der Exzentrizität der Bahn und der Länge des Periastrons bei Vorhandensein des Reflexionseffektes und der Weg zur Bestimmung der übrigen Elemente angedeutet. Zuletzt wird der „Effekt des Periastrons“ erörtert, der bei einer elliptischen Bahn eine Asymmetrie der Lichtkurve verursacht und an einigen Beispielen erläutert.

*A. Michailov* (Moskau).

**Krat, W.:** On the determination of the orbital elements of eclipsing binaries. Russ. astron. J. 12, 21—25 u. engl. Zusammenfassung 25—27 (1935) [Russisch].

Für den Fall stark exzentrischer Sternbahnen und die Hypothese „U“ (gleichförmige Helligkeit der Sternscheiben) werden Formeln abgeleitet zur Berechnung des Verhältnisses der Radien der beiden Komponenten  $k$  und der größten Phase der Verfinsternung  $\alpha_0$ , wenn die Kreiselemente bereits bekannt sind. Darauf wird der Fall ungleichförmiger Helligkeit (Hypothese D) für das Helligkeitsgesetz  $J(\theta) = J\left(\frac{\pi}{2}\right)(1 + x \cos \theta)$

behandelt und eine für alle Exzentrizitäten gültige Formel zur Berechnung von  $d\rho/d\theta$  angegeben, wo  $\rho = \delta/r_1$ , mit  $\delta$  = scheinbarer Entfernung zwischen den Sternzentren und  $r_1$  = Radius der einen Sternkugel. Die Formeln werden durch die Berechnung der Elemente des Sternes TZ Lyrae erläutert (I. vgl. vorsteh. Ref.).

*A. Michailov.*

**Sterne, T. E.:** Statistical methods for investigating the deviations of a stellar distribution from the laws of chance. Circ. Harvard Coll. Observ. Nr 396, 1—14 (1934).

If the space density of stellar distribution were perfectly uniform then on stellar photographs we would have the background always uniformly covered by stars. In practice this is never the case since, firstly, in stellar distribution there are local minor accidental irregularities and, secondly, the uniformity of the apparent distribution is disturbed by the presence of dark nebulae and star clusters, and in general by all kinds of systematic departures of stellar distribution from uniformity such as for instance is the result of galactic concentration, the defective illumination near the edges of the photographic plate etc. — The question is then considered, how to determine the probability that an accidental distribution will deviate from the uniform distribution as much as, or more than, the distribution actually observed on a certain star field. If this probability is small there is evidence that there is a real departure from random distribution. — Four different methods of evaluating this probability are discussed and applied to numerical examples and the respective results compared with each other. The methods are referred to as (1) the association method, (2) the correlation method, (3) the method of standard deviations and (4) the method of comparing the observed distribution with the law of Poisson. — It is shown that the application of all these methods to various examples leads to practically the same results.

*K. Ogrodnikoff.*

**Ambarzumian, V. A.:** On the ionisation in the nebular envelope surrounding a star. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 95, 469—482 (1935).

In der Arbeit behandelt Verf. im Anschluß an frühere Arbeiten (Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 93, 50; vgl. dies. Zbl. 6, 134, und Bull. de l'obs. central à Poulkovo 13, 3) die Verhältnisse in Nebelhüllen, die an Ausdehnung zwischen gewöhnlichen Atmosphären und planetarischen Nebeln stehen und auf die wir bei der Deutung der Emissionslinien in Sternen der frühen Spektraltypen geführt werden. Es wird zunächst gezeigt, daß die bei planetarischen Nebeln zu vernachlässigenden Übergänge  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  im vorliegenden Falle berücksichtigt werden müssen. Bei einem Übergang in das dritte oder ein höheres Niveau spricht Verf. von „Ionisation“. Die weitere rechnerische Behandlung des Problems erfolgt in ähnlicher Weise wie in den früheren Arbeiten. Es ergibt sich schließlich eine langsame Abnahme der Ionisation nach außen.

*Klauder* (Jena).

**Orlov, S. V.:** On the structure of comet's head. Russ. astron. J. 12, 1—16 u. engl. Zusammenfassung 16—20 (1935) [Russisch].

According to the classical theory of comet heads 1) the heads must have the form of paraboloids of revolution and 2) the ratio  $\frac{\xi_0}{r^2} = \frac{g^2}{2k^2(1+\mu)}$  must remain constant with

me. Here  $\xi_0$  denotes the distance of the head's summit from the nucleus,  $g$  — the velocity of emergence of molecules from the nucleus and  $1 + \mu$  — the repulsive acceleration of the sun. Neither of these predictions of the theory are confirmed by observations. — The observed shapes of the heads suggest values of the ratio  $\frac{2\eta_0}{\xi_0}$  ( $\eta_0$  denoting the parameter of the paraboloid) which are considerably lower than 4, the theoretical value for true paraboloids. This shows that the compression of comet heads is greater than it should have been according to the theory. — In order to account for the observed shapes of comet heads Bredichin suggested two factors: The first one, that the initial velocities of the molecules depend upon the angle which they form with the radius-vector of the comet [Annales de l'Observatoire de Moscou 2, I, 59 (1881)]. The other that the aperture of the solid angle at the nucleus within of which the molecules are ejected is less than  $90^\circ$  (Jaegermann, Bredichins Untersuchungen über Kometenformen, S. 186). The author shows however that these factors alone are inadequate to account for the above deviations. Neither the effect of projection upon the sky may be responsible for the observed great compression of the heads as the author shows that the eccentricity of the envelope is practically unaltered by projecting. — With respect to the constancy of  $\xi_0/r^2$  the author states, that although Bredichin also tried to account for the variations of this quantity by assuming that the initial velocities  $g$  depend upon the radius-vector  $r$  of the comet, he did not discuss this factor in any detail and even did not formulate any particular hypothesis as to the law of change of  $g$ . — In order to find this law the author considers the heat received by the comet's nucleus from the Sun as the main factor which causes this variation. In the first line the author considers the temperature effect. Assuming the nucleus to be a perfectly black ball he derives a formula for the mean thermal velocity

$v_0$  of the molecules in the form  $v_0 = \frac{c}{\sqrt{\delta} \sqrt[3]{r}}$  km./sec. where  $\delta$  is the density of the gas expressed in terms of the air density under normal conditions and  $c$  a constant depending upon the solar constant  $a$ , the Stephan-Boltzmann constant  $\sigma$  and the constant  $A$  in the formula for

the mean thermal velocity of gas molecules  $v_0 = \sqrt{\frac{AT}{\delta}}$  ( $T$  — the absolute temperature).

Substituting numerical values the author finds for  $c$  the value 0,495. Assuming  $\delta$  for the  $(\text{CN})_2$  and  $\text{C}_2$  molecules to be equal to 1,806 and 0,833 respectively he concludes that  $v_0$  must be of the order of 0,4—0,5 km./sec. only. This is decidedly too small to account for the observed velocities of ejection which are scores of times larger. — This leads the author to the assumption that the solar rays after being reflected from comet nuclei repel the molecules away from the nucleus much in the same way as they do by travelling from the Sun toward the comet. Assuming therefore, that the repulsive force of the nucleus varies in inverse proportion to the square of  $r$ , he derives the formula giving the value of the velocity  $v$  of a molecule at distance  $\xi$  from the nucleus moving along the radius-vector of the comet:

$$v^2 = -\frac{2k^2(1+\mu)}{r-\xi} - \frac{2k^2\mu'}{r^2\xi} + \frac{2k^2(1+\mu)}{r-\xi_0} + \frac{2k^2\mu'}{r^2\xi_0},$$

where a new constant  $\mu'$ , the repulsive acceleration of the nucleus is introduced. At the boundary of the sphere of activity of the nucleus the relative velocity  $v$  is maximum. On the other hand, according to Bredichin's definition this velocity is exactly what we mean by the term initial velocity  $g$ , the square of which is equal to  $\frac{2k^2(1+\mu)\xi_0}{r^2}$ . From these two

conditions an approximate formula is derived for  $\xi_0$ :  $\xi_0 = \sqrt{2r} \sqrt[3]{M}$  whereby not  $\xi_0/r^2$  but  $\xi_0/\sqrt[3]{r}$  has to remain constant. — The new formula was checked on two comets: 1910 I and 1910 II (Halley). It is found that the quantity  $\xi_0/\sqrt[3]{r}$  derived from observations is practically constant in all cases. In case of Halley's comet there were four envelopes each one having its own value of  $\xi_0/\sqrt[3]{r}$  permitting to compute  $M = \mu'/1 + \mu$  which was found to have the values  $250 \cdot 10^{-17}$ ;  $8,3 \cdot 10^{-16}$ ;  $5,8 \cdot 10^{-15}$  and  $2,5 \cdot 10^{-14}$  resp. for the first, second, third and fourth envelopes visible in the head of this comet on the plates measured by Bobrovnikoff [Publ. Lick Observ. 22, 400 (1931)].

Kyryll Ogrodnikoff (Moscow).

## Relativitätstheorie.

● Milne, E. A.: Relativity, gravitation and world-structure. (The internat. ser. of monogr. on physies. Edit. by R. H. Fowler a. P. Kapitza.) Oxford: Clarendon press 1935. VIII, 365 S. a. 21 Fig. geb. 25/-.

Das Buch enthält eine sehr ausführliche und vollständige Darstellung der Gedanken des Verf. zur Kosmologie, die er zuerst in Z. Astrophys. 6, 1—95 (1933) in noch unvollkommener Form veröffentlichte, die er und einige Mitarbeiter in zahlreichen späteren Aufsätzen präzi-



sierten und immer mehr gegen die Kosmologie der allgemeinen Relativitätstheorie abzugrenzen sich bemühten. Doch geht es über diese Vorarbeiten insofern noch weit hinaus, als es eine eigene, konsequent durchgeführte Axiomatik fundamentaler Messungen allen mathematisch-physikalischen Erörterungen zugrunde legt. — Die Einleitung „Scope of the Investigation“ umreißt in vorläufiger Form die im späteren einzunehmende Position. Namentlich die Art der Verwendung der Begriffe „Raum“ und „Zeit“ wird beschrieben. Der I. Hauptteil „Kinematics and Relativity“ definiert sorgfältig den für alles weitere charakteristischen und fundamentalen Begriff äquivalenter Beobachter: Zwei (zunächst) beliebig gegeneinander bewegte Beobachter  $A$  und  $B$  sollen äquivalent heißen ( $A \equiv B$ ), wenn  $A$  seine mit Uhr und Lichtsignalen erhaltenen Beobachtungen über  $B$  in genau derselben Weise beschreiben kann, wie  $B$  die seinigen über  $A$ . Die Möglichkeit der Einführung dieses Begriffs der Äquivalenz hängt an zwei simultanen Funktionalgleichungen, die sehr ausführlich behandelt werden. Es gelingt die Herleitung einer Verallgemeinerung der Lorentztransformation eindimensionaler Bewegungen auf relativ zueinander beschleunigte Systeme und eine interessante Herleitung der Lorentztransformation bei gleichförmigen Translationen räumlicher Systeme. Dann werden jene Systeme von Partikeln definiert, die im weiteren als Modelle des Universums genauer untersucht werden. Für sie wird das „kosmologische Prinzip“ aufgestellt: Sie sollen sämtlich so beschaffen sein, daß irgend zwei äquivalente Beobachter  $A$  und  $B$  auf zwei Partikeln einer solchen Welt die gleiche Gesamtansicht von ihr haben. Der II. Hauptteil „Kinematic World-Modells“ beginnt mit vorläufigen Betrachtungen, die den Newtonschen Zeitbegriff benutzen. Es wird gezeigt, daß die berühmte Korrelation zwischen Entfernung und Relativgeschwindigkeit irgend zweier Partikel schon auf Grund sehr schwacher Voraussetzungen kinematischer Art erhalten werden kann, ohne die Relativitätstheorie in irgendeiner Form zu bemühen. Im weiteren wird dann ein einfaches kinematisches Weltmodell konstruiert, dessen Geschwindigkeitsverteilung Lorentz-invariant ist, das in dieser speziellen Hinsicht also dem kosmologischen Prinzip genügt. Es wird gezeigt, daß man durch geeignete Koordinierung einer Dichte das System auch vollkommen dem kosmologischen Prinzip unterwerfen kann. Dann ergibt sich der Dichteverlauf

$$n dx dy dz = B c^{-2} \left[ t^2 - \frac{1}{c^2} (x^2 + y^2 + z^2) \right]^{-2} t dx dy dz \quad (1)$$

( $B = \text{konst.}$ ;  $c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$ ;  $x, y, z, t = \text{Koordinaten und Zeit eines zulässigen Beobachters}$ ), und die Geschwindigkeiten folgen dem einfachen Gesetz

$$u/v = v/y = w/z = 1/t. \quad (2)$$

Das durch diese Gleichungen beschriebene System ist das Fundament alles weiteren. Die Partikel, aus welchen es besteht, sind sämtlich einander „äquivalent“: Von jedem von ihnen hat ein Beobachter die gleiche Ansicht der „Welt“ (1), (2). Die weitere Verwendung dieses Modells geschieht nun in der Weise, daß alle neuen Modelle durch Einfügen neuer Partikel in das Grundmodell gewonnen werden, wobei diesen zusätzlichen Partikeln aber gestattet wird, relativ zu den Fundamentalpartikeln beschleunigt zu sein. Die zusätzlichen Partikel können aber nicht Träger äquivalenter Beobachter sein, da die Verallgemeinerung der Lorentztransformation auf beschleunigte dreidimensionale Bewegungen (unter Beibehaltung geradliniger Fortpflanzung des Lichtes) nicht möglich ist. Das „kosmologische Prinzip“ tritt nun in einer eigenartigen und ungeheuer scharfen Form auf. Es wird verlangt: Sind  $O$  und  $O'$  äquivalent und existiert für  $O$  eine Partikel  $P$  am Orte  $P(x, y, z)$  mit der Geschwindigkeit  $V(u, v, w)$  zur Zeit  $t$ , die die Beschleunigung  $g(P, V, t)$  hat, so soll es für  $O'$  eine analoge Partikel  $P'$  geben, welche am Orte  $P'(x', y', z')$  die Geschwindigkeit  $V'(u', v', w')$  zur Zeit  $t'$  hat mit einer Beschleunigung  $g'(P', V', t')$  derart, daß erstens  $g'$  aus  $g$  entsteht durch Lorentztransformation von  $O$  auf  $O'$ , daß aber auch zweitens  $g'$  von  $P', V', t'$  in genau der gleichen Form abhängt wie  $g$  von  $P, V, t$ . Dadurch ist die Funktion  $g$  bestimmt. Es kommt

$$g = (P - Vt) \frac{Y}{X} G(\xi), \quad (3)$$

wo  $X = t^2 - P^2/c^2$ ;  $Y = 1 - V^2/c^2$ ;  $Z = t - P \cdot V/c^2$ ;  $\xi = Z^2/XY$  ist und  $G(\xi)$  noch unbestimmt bleibt. Das kosmologische Prinzip hat damit zu expliziten Bewegungsgleichungen  $dP/dt = V$ ;  $dV/dt = g$  geführt. Die Folgerungen aus (1), (2) und (3), soweit sie ohne Integration der Bewegungsgleichungen gezogen werden können, umfassen den Rest des II. Hauptteils: Die Beschleunigungen werden in Beziehung zur Gravitation gesetzt, wodurch allerdings eine zeitabhängige „Gravitationskonstante“ nötig wird. Nachdem die Fundamentalpartikel mit extragalaktischen Nebeln identifiziert sind, werden die Beziehungen zur Beobachtung hergestellt. Der III. Hauptteil „The Career of the Universe“ beginnt mit der vollständigen Integration der Bewegungsgleichungen; die explizite Kenntnis von  $G(\xi)$  ist dazu weitgehend unnötig. Über die sehr große Zahl von Einzelheiten der so erhaltenen „Welttrajektorien“ und ihre statistische Behandlung kann hier nicht mehr berichtet werden. Für die Anschauung bemerkenswert ist, daß die freien Zusatzpartikel sich in der Umgebung jeder Fundamentalpartikel stark häufen, so daß man aus einem kinematischen Grundpostulat heraus zu der Vorstellung einer Welt geführt worden ist, deren Elemente Partikelsysteme sind mit starker zentraler Verdichtung. Wichtig ist die in § 385 gegebene Aufzählung aller beobachteten

Charakteristiken des Modells. Der IV. Hauptteil „World-Pictures“ geht noch einmal kurz das einfache durch (1) und (2) beschriebene Modell ein und behandelt dann in nur losem Zusammenhang mit allem vorhergehenden die Möglichkeiten der Kosmologie auf Grund Newtonscher Mechanik und Anziehung. Den Schluß bildet eine kritische Auseinandersetzung mit der allgemeinen Relativitätstheorie und ihrer Kosmologie. Mathematische Ergänzungen Anhang. Namen- und Sachregister. Heckmann (Göttingen).

**Tavani, F.:** Concerning the meaning of time in Lorentz transformation. *Philos. Mag.*, I. s. 19, 1055—1057 (1935).

**Vogtherr, Karl:** Gleichzeitigkeit und Relativitätstheorie. I. *Z. Physik* 94, 261—276 (1935).

**Vogtherr, Karl:** Gleichzeitigkeit und Relativitätstheorie. II. *Z. Physik* 94, 785—800 (1935).

Aus a priori angestellten Überlegungen und Gedankenexperimenten kommt der Verf. zu dem Ergebnis, daß nicht die Lorentzgruppe, sondern die Galileigruppe für die neue Physik bindend sein müsse. Heckmann (Göttingen).

**Sulaiman, Shah Muhammad:** The mathematical theory of a new relativity. *Proc. Ind. Acad. Sci., Allahabad* 4, 217—261 (1935).

**Langevin, Paul:** Sur un projet d'expérience de M. Dufour. *C. R. Acad. Sci., Paris* 0, 1161—1165 (1935).

An investigation of the relativistic kinematics of discs rotating with different uniform angular velocities about the same axis. H. S. Ruse (Edinburgh).

**Langevin, Paul:** Sur un projet d'expérience de M. Dufour. *C. R. Acad. Sci., Paris* 0, 1448—1450 (1935).

A reply to Dufour's discussion of the above paper [see Dufour, *C. R. Acad. Sci., Paris* 200, 1283 (1935)]. H. S. Ruse (Edinburgh).

**Weysenhoff, Jan W.:** On the derivation of the laws of motion in the theory of relativity. *Philos. Mag.*, VII. s. 19, 416—419 (1935).

A simple derivation of the usual relativistic formula for the momentum of a particle, based on the consideration of the inelastic collision of two identical particles. The assumptions are as follows: (A) it is possible to assign to each particle a momentum-vector depending only on its velocity-vector such that the sum of the momenta of all particles involved in a collision remains constant in any collision, and (B) this holds in any Galilean frame of reference. J. L. Synge (Toronto).

**Einstein, Albert:** Elementary derivation of the equivalence of mass and energy. *Bull. Amer. Math. Soc.* 41, 223—230 (1935).

Herleitung der Äquivalenz von Masse und Energie in der speziellen Relativitätstheorie aus der Forderung der Erhaltung von Impuls und Energie bei elastischen und inelastischen Stößen. Heckmann (Göttingen).

**Kunii, Shūjiro:** On Campbell's theorem and its applications to relativistic cosmology. *Mem. Coll. Sci. Kyoto A* 17, 291—304 (1934).

Es wird gezeigt, wie eine allgemeine Lösung der Feldgleichungen  $G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$  in sukzessiver Approximation hergestellt werden kann. Das Linienelement wird angesetzt in der Form  $ds^2 = V^2(dx^0)^2 + g_{ik}dx^i dx^k$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ), wo  $V$  und  $g_{ik}$  beliebige Funktionen von  $x_0, x_1, x_2, x_3$  sind [in diese Form läßt sich jedes Intervall  $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ) durch passende Koordinatenwahl bringen; Ref.] und so bestimmt, daß die  $g_{ik}$  für  $x_0 = 0$  mit willkürlich vorgegebenen Funktionen  $a_{ik}(x_1, x_2, x_3)$  übereinstimmen. Anwendung auf die Frage der Stabilität der einsteinschen Zylinderwelt und die Ausbildung von Kondensationen. Heckmann.

**Chalmers, J. A., and B. Chalmers:** The expanding universe — an alternative view. *Philos. Mag.*, VII. s. 19, 436—446 (1935).

Die Rotverschiebung der Linien in den Spektren der außergalaktischen Nebel wird zurückgeführt auf eine zeitliche Änderung der Planckschen Konstanten  $h$  während des Zeitraumes zwischen Aussendung und Empfang des Lichtes. Heckmann.

**Jeans, James:** The structure of the universe. *Nature* 135, 673—675 (1935).



## Quantentheorie.

Flint, H. T.: A relativistic basis of the quantum theory. III. Proc. Roy. Soc. London A 150, 421—441 (1935).

II. s. dies. Zbl. 9, 184.

Labocchetta, Letterio: Le costanti numeriche caratteristiche dello spazio fisico e definizione assoluta del valore della carica dell'elettrone, del quanto di Planck, del magneton di Bohr e della costante di Rydberg. Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncei 88, 211—221 (1935).

Gomes, R. L.: Quelques considérations sur l'équation fondamentale de la „Nouvelle Conception de la Lumière“ du prof. Louis de Broglie. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI. s. 21, 358—364 (1935).

Gomes, R. L.: Quelques considérations sur l'équation fondamentale de la „Nouvelle Conception de la Lumière“ du prof. Louis de Broglie. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI. s. 21, 443—447 (1935).

Gomes, R. L.: Sur une propriété de l'opérateur  $H$  de M. de Broglie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 499—501 (1935).

● Meitner, Lise, und Max Delbrück: Der Aufbau der Atomkerne, natürliche und künstliche Kernumwandlungen. Berlin: Julius Springer 1935. 62 S. u. 13 Abb. RM. 4.50.

Sevin, Émile: Les niveaux du neutron. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 2070—2072 (1935).

Wick, G. C.: Teoria dei raggi  $\beta$  e momento magnetico del protone. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 170—173 (1935).

Es wird die Annahme diskutiert, daß die Kräfte zwischen Neutronen und Protonen im Kern von einer virtuellen Erzeugung eines Neutrinos und eines Elektrons (virtueller  $\beta$ -Zerfall) herrühren. Es wird darauf hingewiesen, daß für diese Kräfte die virtuelle Erzeugung von Teilchen mit 137mal größerem Impuls eine Rolle spielt als sie beim wirklichen  $\beta$ -Zerfall auftreten. Daher ist es nicht überraschend, daß die Extrapolation der Daten aus dem Zerfall hier sehr stark von dem Ansatz für die Erzeugungswahrscheinlichkeit abhängt, und daß der einfachste Ansatz für diese eine falsche Größenordnung liefert. Es wird ferner gezeigt, daß die gleichen Annahmen dazu führen, daß das magnetische Moment des Protons nicht gleich einem Kernmagneton ist, und es wird plausibel gemacht, daß dieser Effekt ausreichen könnte, um das beobachtete Moment des Protons zu erklären.

R. Peierls (Manchester).

Jaeger, J. C., and H. R. Hulme: The internal conversion of  $\gamma$ -rays with the production of electrons and positrons. Proc. Roy. Soc. London A 148, 708—728 (1935).

Die Verf. berechnen die Anzahl von Elektron-Positron-Paaren, welche durch die Absorption der von einem radioaktiven Kern ausgesandten  $\gamma$ -Strahlen in der Nähe von demselben Kern produziert werden. Dabei wird der radioaktive Kern als strahlender Dipol oder Quadrupol betrachtet. Der Effekt ist nicht sehr empfindlich gegen Änderung der Atomnummer des Kerns und wächst mit der Energie des  $\gamma$ -Strahlquants. Für  $\gamma$ -Quanten der Größenordnung  $5 mc^2$  werden etwa  $10^{-4}$  bis  $10^{-3}$  Paare pro Quant erzeugt. In diesem Gebiet nimmt der Positron den größten Teil der verfügbaren Energie auf. Im Grenzfall sehr kleiner Atomnummer hat man symmetrische Energieverteilung zwischen Elektron und Positron. Die Resultate zeigen (mit Berücksichtigung der experimentellen Schwierigkeiten) befriedigende Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen von Alichanow und Koxaew [Z. Physik 90, 249 (1934)].

Waller (Upsala).

Hulme, H. R., J. McDougall, R. A. Buckingham and R. H. Fowler: The photoelectric absorption of  $\gamma$ -rays in heavy elements. Proc. Roy. Soc. London A 149, 131—151 (1935).

Die Verf. entwickeln eine Methode zur numerischen Berechnung des photoelektrischen Absorptionskoeffizienten für die  $K$ -Schale (mit Vernachlässigung der Wechselwirkung der Elektronen). Die Methode ist für beliebige Atomnummer  $z$  und Ener-

den  $h\nu_0$  der einfallenden Quanten gültig. Praktisch anwendbar hinsichtlich der numerischen Auswertung ist sie nur für  $h\nu_0/mc^2 < 4$  ( $mc^2$  = Ruheenergie des Elektrons). Numerische Berechnungen sind ausgeführt für  $h\nu_0/mc^2 = 0,693$  und  $2,21$  sowie  $= 26, 50, 84$ . Die berechneten Werte stimmen gut mit der von Harvey Hall (vgl. dies. Zbl. 9, 277) abgeleiteten Formel überein. Die Verff. benutzen seine Formel sowie die für  $z \rightarrow 0$  gültige Sautersche Formel zur Komplettierung ihrer eigenen Rechnungen. Der Absorptionskoeffizient des ganzen Atoms wird dann durch Multiplikation mit  $5/4$  erhalten wegen experimenteller Erfahrungen und Berechnungen von Hall und Rarita [Physic. Rev. 46, 143 (1934)]. Die Verff. geben Kurven für verschiedene Elemente, welche die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von  $h\nu_0/mc^2$  zeigen. Für Blei ist die Übereinstimmung vorzüglich mit den empirischen Kurven von L. H. Gray [Proc. Cambridge Philos. Soc. 27, 103 (1931)] im Bereich  $h\nu_0/mc^2 \approx 1$ .  
Waller (Upsala).

Bethe, H. A.: On the annihilation radiation of positrons. Proc. Roy. Soc. London A 150, 129—141 (1935).

Die Wahrscheinlichkeit für die Vernichtung eines positiven Elektrons und die Intensität und Richtungsverteilung der dabei entstehenden Strahlung werden berechnet. Die Ergebnisse werden herangezogen zur Deutung der experimentellen Resultate über die Streuung harter  $\gamma$ -Strahlen.  
Casimir (Leiden).

Fano, Ugo: Sullo spettro di assorbimento dei gas nobili presso il limite dello spettro d'arco. Nuovo Cimento, N. s. 12, 154—161 (1935).

Die Spektren der Edelgasatome zeigen zwei Serien von Linien, die gegen die Grenzen  ${}^2P_{3/2}^0$  und  ${}^2P_{1/2}^0$  konvergieren. In dem Bereich zwischen diesen beiden Grenzen untersuchte Beutler [Z. Physik 93, 177 (1935)] das Absorptionsspektrum bei sehr geringen Drucken und fand Serien stark verbreiteter unsymmetrischer Linien über dem kontinuierlichen Untergrund. — Würde man zu ihrer Deutung von den Eigenfunktionen nullter Näherung der einzelnen Elektronen ausgehen, so erhielte man ein Kontinuum mit überlagerten scharfen Linien, die gegen  ${}^2P_{1/2}^0$  konvergieren. Das Beutlersche Ergebnis ist daher nur durch eine Wechselwirkung zwischen Kontinuum und diskreten Termen zu verstehen. Hierbei genügt es, die unmittelbare Umgebung des diskreten Terms zu betrachten, wo Verf. das Kontinuum durch ein sehr enges diskretes Spektrum ersetzt, indem er das Atom als in eine sehr große Kugel eingeschlossen ansieht. Die Störungsrechnung ergibt dann unter einer Reihe weiterer Idealisierungen stark durch Autoionisation verbreiterte Linien. Ferner tritt die gewünschte Wechselwirkung zwischen Kontinuum und Linien auf, die eine Unsymmetrie und leichte Verschiebung der letzteren bedingt.  
S. Flügge (Leipzig).

Blochinzew, D., und F. Halperin: Über die Absorption und Streuung der Röntgenstrahlen. Physik. Z. Sowjetunion 7, 175—188 (1935).

Der Photoeffekt an der K-Schale wird berechnet, indem als Eigenfunktion des Elektrons im angeregten Zustand (kontinuierliches Spektrum) eine ebene Welle angenommen wird, „weil diese dem Problem der Elektronen im Kristallgitter mehr angepaßt sei“ als die (korrekte) Eigenfunktion des Elektrons im Feld des Atoms.  
Bethe (Ithaka).

Pauling, Linus, and J. Y. Beach: The van der Waals interaction of hydrogen atoms. Physic. Rev., II. s. 47, 686—692 (1935).

Die van der Waalsche Wechselwirkung zweier Wasserstoffatome wird für große Abstände mittels eines Variationsverfahrens mit sehr vielen Parametern numerisch ausgerechnet. Das Ergebnis zeigt, daß das erste Glied der Energie  $-\frac{A}{R^6} - \frac{B}{R^8} - \frac{C}{R^{10}} - \dots$  schon bei Eissenschitz und Jordan [Z. Physik 60, 491 (1930)], Hassé (dies. Zbl. 1, 39), Slater und Kirkwood (dies. Zbl. 1, 248) recht gut herauskam. F. Hund (Leipzig).



**Knipp, Julian K.:** On the Zeeman effect in diatomic molecular states having L-uncoupling. *Physic. Rev.*, II. s. 47, 672—677 (1935).

Der Zeemaneffekt eines zweiatomigen Moleküls wird theoretisch für den Fall untersucht, daß der Bahndrehimpuls  $L$  der Elektronen teilweise durch die Molekülrotation von der Kernverbindungsline entkoppelt ist. Die Theorie wird vor allem auf die 3  $d$ - und 4  $d$ -Zustände von  $\text{He}_2$  angewandt, wo ein Vergleich mit der Erfahrung möglich ist. Es ergibt sich befriedigende Übereinstimmung. *R. de L. Kronig.*

**Steenholt, Gunnar:** Über die Polarisierbarkeit von  $\text{H}_3^+$ . *Z. Physik* 94, 770—772 (1935).

Berechnung der Polarisierbarkeit nach einem Variationsverfahren. *Bethe.*

**Coulson, C. A.:** The electronic structure of  $\text{H}_3^+$ . *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 31, 244—259 (1935).

Für die gleichseitig dreieckige Anordnung der Kerne werden die beiden tiefsten Zustände eines einzelnen Elektrons im Kraftfeld des Molekülrestes untersucht und damit Abschätzungen für die Energie der  $\text{H}_3^+$ -Molekel gegeben. *F. Hund* (Leipzig).

**Wheland, G. W.:** The quantum-mechanical treatment of molecules by the method of spin valence. *J. chem. Phys.* 3, 230—240 (1935).

Für die Annäherung der Eigenfunktionen einer Molekel durch E.-Fn. einzelner Elektronen in Atomen (Slater, vgl. dies. Zbl. 3, 95) läßt sich auch das formale Verfahren der „Spinvalenz“ (Born, Heitler, Rumer, Weyl, vgl. dies. Zbl. 1, 251; 2, 308, 428) benutzen. Die Ausnutzung der Symmetrie der Molekel wird an einem Beispiel gezeigt; Vereinfachungen für verwickelte Fälle werden angegeben. *F. Hund.*

**Eyring, Henry, and Harold Gershinowitz:** The resolution of bond eigenfunctions in terms of a linearly independent set. *J. chem. Phys.* 3, 224—229 (1935).

Die Eigenfunktion eines Molekelterms nähert man häufig durch sog. „Bindungseigenfunktionen“ an (Slater, vgl. dies. Zbl. 3, 95). Diese werden mittels eines analytischen Verfahrens durch einen Satz linear unabhängiger Bindungsfunktionen dargestellt. Das Verfahren wird erläutert am Fall der Singulettts bei 3—6 Bindungen. *F. Hund* (Leipzig).

**Schuchowitzky, A. A.:** Eine neue Formulierung des Pauli-Prinzips für Bindungsprobleme. *Acta physicochim.* (Moskva) 2, 81—90 (1935).

Bei der Zurückführung des Vielelektronenproblems einer Molekel auf ein Problem der äußeren Elektronen allein wird gewöhnlich die durch das Pauli-Prinzip bedingte Abstoßung zwischen einer abgeschlossenen Schale und den Valenzelektronen des Nachbaratoms vernachlässigt. Durch eine einfache Abänderung des Verfahrens läßt sie sich näherungsweise mitberücksichtigen. *F. Hund* (Leipzig).

**Trenkler, Friedrich:** Eigenschwingungen mechanischer Molekülmodelle. II. Viermassensysteme. *Physik. Z.* 36, 423—432 (1935).

I. s. dies. Zbl. 10, 382.

**Slater, J. C., and H. M. Krutter:** The Thomas-Fermi method for metals. *Physic. Rev.*, II. s. 47, 559—568 (1935).

Die Verteilung der Elektronen in einem Metall wird unter Berücksichtigung des Potentials der Ionen nach der Thomas-Fermischen Näherung berechnet. Dabei wird das Feld der ein bestimmtes Ion umgebenden Ionen als kugelsymmetrisch behandelt. Es stellt sich heraus, daß sich eine sehr schlechte Näherung für die Gesamtenergie ergibt, diese nimmt nämlich mit wachsendem Atomabstand monoton ab, und zeigt überhaupt kein Minimum. Auch eine Berücksichtigung des Austauschs nach Dirac gibt keine wesentliche Verbesserung. Verf. sind der Meinung, daß die Methode trotzdem eine vernünftige Dichteverteilung liefert, die als nulle Näherung für eine bessere Methode verwendet werden kann. *R. Peierls* (Manchester).

**Gorter, C. J.:** Note on the supraconductivity of alloys. *Physica* 2, 449—452 (1935).

Nimmt man an, daß ein Magnetfeld eine endliche, vom Material abhängige Eindringtiefe  $l$  (Schicht der persistierenden Ströme) in einen Supraleiter hat, so werden, wie Verf. zeigt, supraleitende Schichten kleinerer Dicke als  $l$  auch bei Feldern oberhalb



les normalen Schwellenwerts möglich. Damit ließe sich das Verhalten gewisser Leiterungen, die bei relativ hohen Feldern supraleitend bleiben, dahin erklären, daß sich in ihnen solche Schichten  $\ll l$  ausbilden. Ein solches supraleitendes Netzwerk könnte auch einen Teil der magnetischen Kraftlinien einfangen, wie beobachtet. Der Unterschied zu normalen Supraleitern bestände darin, daß in letzteren die Minimaldimensionen eines supraleitenden Gebietes schon  $> l$  wären. *Nordheim* (Lafayette, Indiana).

## Klassische Optik.

**Erdélyi, Artur:** Bemerkungen zur Ableitung des Snelliusschen Brechungsgesetzes. *Z. Physik* 95, 115—132 (1935).

Einleitend erwähnt Verf. die bekannten Komplikationen, welche bei der Lösung der Wellengleichungen in unendlich ausgedehnten Medien darin bestehen, daß außer den Rand-, Übergangs- und Regularitätsbedingungen im Endlichen noch Randbedingungen im Unendlichen vorgeschrieben werden müssen. Nach dem Vorgang von Weyrich kann man von vornherein nur im endlichen gelegene Energiequellen zulassen und sodann die Leitfähigkeit des Mediums von null verschieden wählen. Hierdurch ist dann die Randbedingung im unendlichen eindeutig festgelegt. Exponentielles Verschwinden der Lösung dortselbst. Nach Verf. leistet diese Methode mehr als die frühere von Sommerfeld angegebene. Verf. zeigt dieses zunächst an dem Beispiel der Reflexion und Brechung einer Zylinderwelle, wobei er auch auf den Existenzbeweis der Lösung kurz eingeht und die Lösung in Form der bekannten unendlichen Integrale diskutiert. Bemerkenswert ist, daß die Arbeit von H. Weyl (*Ann. Physik* 1919) nicht erwähnt wird. Im weiteren Teil der Arbeit befaßt Verf. sich mit der Ableitung von Näherungswerten im Falle sehr großer Entfernung von der Lichtquelle (Übergang zur ebenen Welle). Zum Schluß erwähnt Verf. bei dem vorliegenden Problem mögliche Fehlschlüsse. Die Dissertation von Funk, Zürich 1921, und die hierher gehörige Arbeit von F. Noether (vgl. dies. *Zbl.* 2, 363) finden keine Berücksichtigung. *M. J. O. Strutt.*

**Darbyshire, O.:** Interpretation of Fermat's principle. *Nature* 135, 586—587 (1935).

Discussion of the meaning of Fermat's principle. The question on which the authors disagree is whether Fermat's principle requires you to compare the optical lengths between two points on every line joining these points, or if you are only allowed to compare the optical lengths on such curves, that are straight in each medium. That means on such curves that are extremals of our variation problem. Obviously, Darbyshire mistakes the principle of Fermat, valid for all neighboring curves, for the principle of stationary path, where only the lightways on extremals have to be compared. The abstractor suggests, in answer to both authors, to remember that Fermat's principle does only allow to compare the lightways on neighboring curves. *Herzberger* (Rochester).

**Bisaire, F. F. P.:** Convergent polarized light and Hertz's problem for a uniaxial material. *Proc. Physic. Soc., London* 47, 306—322 (1935).

Während man sich im allgemeinen bei der Behandlung der Optik der Kristalle auf ebene Wellen beschränkt und aus deren Verhalten auf die Ausbreitung und das Verhalten konvergierender oder divergierender Wellen schließt, entwickelt der Verf. für den Spezialfall des einachsigen Kristalles die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes, des Pointingschen Vektors usw., die einem im Kristall schwingenden elektrischen Dipol entsprechen. Er diskutiert die erhaltenen Gleichungen für vom Dipol weit entfernte Aufpunkte sowie für solche Aufpunkte, die in nächster Nähe (Abstand  $\ll$  Wellenlänge) des Dipoles liegen. Das elektromagnetische Wellenfeld läßt sich aus zwei Einzelwellen, einer sphärischen und einer sphäroidalen Welle zusammensetzen. Die bekannten Aussagen über die Fresnelsche Wellenfläche werden in größerem Abstände vom Dipol bestätigt. In nächster Nähe des Dipols gelten sie nicht. Hier ist das elektrische Feld das elektrostatische Feld des Dipols, das mit der Zeit sinusförmig sich ändert, ohne angebbare Phasenabhängigkeit vom Abstand. In Richtung der Symmetrieachse des Materials werden beide genannten Wellen, die sphärische und die sphäroidale — einzeln betrachtet — unbestimmt. Diese Unbestimmtheit verschwindet aber, wenn man beide



Wellen gemeinsam betrachtet. Es handelt sich also nur um eine mathematische Zerlegung in zwei Wellen, die keine physikalische Realität besitzt. Der Verf. gibt auf Grund der von ihm abgeleiteten theoretischen Ergebnisse Anweisungen zur einfachen experimentellen Erzeugung der bekannten Ringe und Büschel, die man bei Kristallen unter besonderen Umständen beobachten kann. *Picht (Berlin).*

**Marton, L.:** *Le microscope électronique et ses applications.* Rev. Optique 14, 1299 bis 145 (1935).

**Croze, François:** *Sur les formules générales de la réfraction d'un pinceau lumineux.* C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1580—1583 (1935).

Geometrical derivation of the formulae of Sturm.

*Max Herzberger.*

**Bouma, P. J., und G. Heller:** *Grundlinien einer allgemeinen Theorie der Farbenmetrik. III.* Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 258—271 (1935).

In a supplement to two earlier papers the authors have given a detailed mathematical theory of their 4-dimensional color space comprising daylight and corpuscular vision. According to this theory, to every type of sensation corresponds a curve. A totality of these curves define a special 3-dimensional space, the so-called *C-space*. The authors investigate how the coördinates of the *C-space* are changed if we transform the coördinates of the 4-dimensional space or if we change the definition of brightness measurement. It is shown that a special 3-dimensional space, called the *D-space*, is independent of the measurement of brightness. — The authors criticize the line element, introduced by Schrödinger, the integral of which should give a measure of the brightness in the space of daylight. They show that the experimental test does not lead to satisfactory results. Therefore, they try to make a generalized line element which they give simultaneously for their 4-dimensional color space. — They also give a conversion of the Schrödinger coördinates to the coördinates suggested by the Commission Internationale de l'Eclairage to obtain a better, i. e., closer conformation to, modern measurements (see this Zbl. 11, 190).

*Max Herzberger (Rochester).*

## **Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.**

**Jacyna, W.:** „Near“ and „Far“ action in the thermodynamical equation of state. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1935, 4—13.

Verf. erörtert den Anteil der Kohäsionskräfte und der Stöße („Fern-“ und „Nahwirkung“) auf die Energie realer Gase. Es wird eine Gleichung abgeleitet, die mit einer thermodynamisch korrekten Zustandsgleichung vereinbar ist und die Temperaturabhängigkeit des Druckes mit der Volumabhängigkeit der Energie derart verknüpft, daß der Einfluß von „Fern-“ und „Nahwirkung“ unmittelbar ersichtlich ist. *Eisenschitz.*

**Jacyna, Witold:** The principle of the „Dominant-action“ in the thermodynamical equation of state. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1935, 14—18.

Verallgemeinerung der Theorie der thermodynamisch korrekten Zustandsgleichung. Es wird gezeigt, daß der negative Jouleeffekt des Heliums mit der Theorie vereinbar ist.

*Eisenschitz (London).*

**Sterne, T. E.:** A note on creation and annihilation in statistical assemblies. Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 303—306 (1935).

Fowler's general method of calculating the equilibrium state of an assembly of dissociating systems [R. H. Fowler, „Statistical Mechanics“ Chapter 21 (1929)] is shown to be capable of application to cases where systems of different species can be created or annihilated in pairs in the assembly itself. Such a case is that of Dirac electron-pairs.

*W. H. McCrea (London).*

**Gemant, A.:** Dipole rotation in solid non-crystalline materials. Philos. Mag., VII. s. 19, 746—758 (1935).

Verf. stellt sich die Frage, ob die Debyesche Dipoltheorie der Flüssigkeiten auf amorphe Medien anwendbar ist bzw. verallgemeinert werden kann. Es wird das Ver-



ten der Dipole in einem amorphen Medium mit Viskosität und Elastizität mit dlicher Relaxationszeit untersucht. Es ergibt sich, daß die Grundgleichungen der poltheorie im betrachteten Fall nahezu unverändert bleiben, so daß die Antwort f die eingangs gestellte Frage bejahend ausfällt. *V. Fock (Leningrad).*

**Trinks, Walter:** Zur Vielfachstreuung an kleinen Kugeln. *Ann. Physik, V. F. 22,* 1—590 (1935).

Verf. untersucht, wie sich die Streuintensität eines kolloidalen Kügelchens ändert, nn ein zweites solches Teilchen in seine unmittelbare Nähe rückt. Zur Erfüllung r Grenzbedingungen an der Oberfläche beider Kügelchen ist eine Transformation r Potentiale auf zwei Polarkoordinatensysteme notwendig. Da im Falle sehr kleiner geldurchmesser  $2a$  in der Entwicklung der Streupotentiale nach Kugelfunktionen n einziges Glied — nach Mie — ausreicht, wird die Transformation auf diesen Fall schränkt. Es erweist sich, daß bei Berücksichtigung eines Nachbarteilchens die reuintensität um einen explizite angebbaren Faktor abgeändert wird, der mit zuhmendem Abstand  $R$  der Kugelzentren sehr rasch gegen 1 geht. Die Berücksichting mehrerer Nachbarteilchen bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. *V. Fock.*

**Debye, P.:** La rotation des molécules dans les liquides. *Bull. Acad. Roy. Belg., V. s.*, 166—174 (1935).

Die Untersuchung der Zerstreuung von Röntgenstrahlen durch Flüssigkeiten ergibt, ß die räumliche Verteilung der Moleküle in einer Flüssigkeit der in einem festen kristallgitter vergleichbar ist. Die Untersuchungen über die Zerstreuung monochrotischen Lichtes durch Flüssigkeiten zeigen weiter, daß auch der dynamische Zustand r Moleküle in einer Flüssigkeit mit der in einem Kristallgitter vergleichbar sei. Man nn sich vorstellen, daß der Schwerpunkt eines Flüssigkeitsmoleküls Schwingungen n einen Punkt ausführt, der sich selbst wieder relativ langsam verschiebt. Ebenso rft auch die Rotation der Flüssigkeitsmoleküle nicht wie in einem Gase vollkommen i erfolgen, sondern mehr oder weniger einer Torsionsschwingung um eine Achse eichen, deren räumliche Orientierung sich selbst wieder langsam verändert. Setzt an diesen Umstand in Rechnung, dann zeigt sich, daß die durch ein Dipolmolekül m Momente  $\mu$  in einem elektrischen Felde der Stärke Eins hervorgerufene Molekularisation nicht den aus der Debyeschen Theorie für ein freies Gasmolekül folgenden wert  $\frac{\mu^2}{3kT}$  hat, sondern daß dieser Wert mit einem Faktor  $R(y) = 1 - L^2(y)$  zu verhen ist, worin  $L$  die Langevinsche Funktion bedeutet und  $y = E/kT$  ist,  $-E \cdot \cos \vartheta$  hließlich die potentielle Energie bedeutet, die das Molekül hat, wenn seine Achse it der Achse der Torsionsschwingungen den Winkel  $\vartheta$  einschließt. Auf Grund dieser tatsache läßt sich verstehen, wieso sich in vielen Fällen aus Messungen der DEK nes Stoffes in Lösung andere Werte für  $\mu$  ergeben als aus Messungen des Stoffes n Dampfzustand. Ähnliche Überlegungen werden auch auf den Kerreffekt angewendet.

*Fürth (Prag).*

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

**Jeffreys, Harold:** Time and amplitude relations in seismology. *Proc. Phys. Soc., London 47,* 455—459 (1935).

In an earlier investigation by the author into the diffraction of a compressional ave in two superposed layers of uniform compressible material certain predictions e made about the amplitudes of the direct and the indirect waves. In particular, hen the depth of the focus is taken into consideration the amplitude of the direct ave should fall off as the inverse square of the distance; actually the amplitude varies ighly as the inverse distance. Further, the configuration of the indirect pulse should e different from that of the direct one, whereas in fact they are of the same type. he author concludes that the only possible interpretation of the amplitude relations hat the angle of emergence of the direct wave is finite and much the same at all



distances; the ordinary law of refraction does not hold, but there is presumably scattering from the interface. It is suggested that the observations made during seismic prospecting may help to settle the outstanding difficulties. It is shown that when the upper layer is not of uniform thickness the delay in transmission due to the overburden depends almost entirely on the velocities and on the depth of the overburden near the ends of the path.

R. Stoneley (Cambridge).

**Banerji, S. K.: Theory of microseisms.** Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 1, 79 bis 753 (1935).

Mikroseismische Bodenunruhe, die Perioden aufweist von 4—10 sec, wird durch verschiedene Ursachen hervorgerufen. Verf. scheidet zwischen falscher und echter Mikroseismik. Erstere ist hervorgerufen durch Druckschwankungen, die durch Windstöße gleicher Periode wie die beobachtete seismische Bodenunruhe verursacht ist, wenn die Druckschwankungen ungedämpften Zutritt zum Seismographen haben. Die echte Mikroseismik kann verursacht sein durch Wellengang im Flachwasser durch Brandung an Küsten, durch Windstöße an Unebenheiten der Erdoberfläche durch magmatische Vorgänge und endlich durch Druckschwankungen am Meeresboden, hervorgerufen durch Schwerewellen an der Wasseroberfläche. Letztere hält Verf. für die wichtigere Ursache. Durch Berücksichtigung der Kompressibilität des Wassers und seiner Viskosität, wobei die letztere weniger Bedeutung hat, gelingt es nachzuweisen, daß sich Druckschwankungen an der Meeresoberfläche verhältnismäßig schnell bis zum Meeresboden fortpflanzen müssen. Versuche in Wasserbassin mit kleinen Wellenlängen (2—6 cm) bestätigen dieses. Bei Stürmen über der Arabischen See und dem Golf von Bengalen wurden in Kalkutta, Bombay, Agra, drei Stationen mit unterschiedlichem geologischem Bau, mikroseismische Bodenbewegungen gleicher Periode aufgeschrieben. In der Nähe des Sturmzentrums ist das Verhältnis der Horizontal- zur Vertikalkomponente etwa 3:1, um in großer Entfernung auf 0, abzufallen. Da die Eigenschwingung der Arabischen See und des Golf von Bengalen 1—2 sec beträgt, kann es sich bei den registrierten Bewegungen nicht um eine Resonanzerscheinung handeln.

B. Brockamp (Kopenhagen).

**Mügge, R.: Energetik des Wetters.** Meteorol. Z. 52, 168—176 (1935).

Der Gegenstand der vorstehenden Arbeit ist ausführlicher bereits in der hier besprochenen Arbeit (G. Stüve und R. Mügge, Energetik des Wetters, vgl. diese Zbl. 11, 239) behandelt worden. — Von den allgemeinen Strahlungsbedingungen und der daraus entspringenden meridionalen Temperatur- und Druckverteilung ausgehend zeigt Verf., daß die durch diese Verteilung bedingte Massenanzordnung ein baroklines Feld ist, in welchem die aus der Massenverteilung herrührende Zirkulationsenergie durch die entgegengesetzt gerichtete, aus der vertikalen Windverteilung folgende im allgemeinen gerade aufgehoben wird. An der Veränderung der Strahlungsbedingungen, welche zur Ungleichheit beider Zirkulationsenergien und damit zur Störung führt, sind weniger die langsam wirkenden Veränderungen der Strahlungsvorgänge an sich als vielmehr die intensiveren Veränderungen der thermodynamischen Vorgänge beteiligt, welche die in der freien Atmosphäre dauernd erfolgende Abkühlung kompensieren. Verf. unterscheidet zwischen Gleit- und Bewegungssteuerung, von denen die erste die Luftmassen in Bewegung setzt und — bei Stabilisierung der Kaltluftmassen und Labilisierung der Warmluftkörper — die horizontale Verteilung der potentiellen troposphärischen Energie verändert. Die an die anisobaren Vertikalbewegungen gebundenen wetterwirksamen Vorgänge benötigen Energiezufuhr. Die Feuchtablilität kann dabei nur die Rolle der Verstärkung schon in Gang gekommenen Aufgleitens übernehmen. Die Änderung der Zirkulationsenergie (Zirkulationsleistung), welche anisobare Vertikalbewegungen in Gang bringt oder abschwächt, kann im wesentlichen durch ungleiche Erwärmung, durch obere Druckänderungsfelder oder durch die Divergenz des Isobarenfelds hervorgerufen werden.

H. Philipps (Frankfurt a. M.).